Systèmes formels et systèmes formalisés

Le « platonisme mathématique en tant que dispositif de conceptualisation non-métaphysique

P. Punin

Il s'agit ici d'une version très brève, ou si on veut, d'un résumé relativement détaillé de mon article « Systèmes formels et systèmes formalisés » / « Le platonisme mathématique en tant que dispositif de conceptualisation non-métaphysique ».
Nécessairement réducteur, ne comportant pas de bibliographie, facilitant néanmoins la vision globale de l'article (plutôt long) en sa version complète, ce résumé n'a pas la vocation de s'y substituer.

Dans cet article, le platonisme et l'antiplatonisme mathématiques sont présentés comme deux options qui, *dans l'absolu*, s'avèrent chacune aussi légitime que l'autre. Sur ces bases, j'analyse un certain nombre de problématiques métamathématiques et/ou épistémologiques qui, à mon avis, *suggèrent* que l'option antiplatonicienne se heurte vite à des contradictions ou à d'autres formes d'incohérence, tandis que l'option platonicienne favorise la cohérence du discours. Il convient d'insister sur la signification du verbe « suggérer ». L'article ne prend pas explicitement position. A chacun d'interpréter finalement ces suggestions à sa manière.

(L'*état d'esprit* de l'article s'aligne sur celui que je crois déceler – bien qu'il s'agisse d'un domaine tout à fait différent – dans *Jacques le Fataliste*. Selon mon interprétation de l'ouvrage – elle ne fait pas l'unanimité – Diderot admet au départ qu'on ne peut prouver ni l'existence du libre arbitre, ni celle de la fatalité véhiculée par la vulgarisation pseudo-spinoziste à juste titre caricaturée. Dans les deux cas de figure, il n'est pas non plus possible prouver le contraire. Mais Diderot s'efforce de montrer qu'un discours dogmatiquement fataliste finit vite par se contredire, tandis qu'un discours considérant le libre arbitre comme une *hypothèse de travail* plausible, voire indispensable mais dans l'absolu indémontrable, peut rester cohérent à l'égard des réalités étant les nôtres.)

Voici donc les grandes lignes de l'article:

La négation d'une proposition d'ordre métaphysique est à son tour une proposition d'ordre métaphysique.
L'affirmation de l'existence objective – indépendante de la pensée humaine – des entités mathématiques et de leurs relations représente une proposition d'ordre métaphysique par excellence. Mais il en est de même quant à la négation de l'existence « platonicienne » des entités mathématiques.
La seule manière possible de « ne pas vouloir faire de la métaphysique », c'est d'accepter simultanément les deux options « platonicienne » et « antiplatonicienne » comme des potentialités.
Mais d'autre part, le refus de métaphysique ne s'oppose certainement pas à l'examen critique des deux options sous l'angle de leurs degrés de cohérence respectifs. Pratiquer, sous prétexte de « scientificité », le déni systématique à l'égard d'éventuelles incohérences relatives à l'option antiplatonicienne exprimerait une attitude aprioriste, défaillante précisément en matière de scientificité.

La notion de formalisation au sens de Hilbert d'un édifice mathématique par un système formel reconsidérée dans l'optique de la théorie des modèles (Hintikka e.a) se prête particulièrement bien à un tel examen critique.

Cette approche pré-requiert la définition des notions de système formel et d'interprétation, ainsi que la spécification symétrisée de l'interprétation aboutissant au concept « formalisation ».
Un système formel, selon la définition communément admise, consiste 1° en un alphabet fini ou dénombrable A composé de signes arbitraires, 2° en un ensemble fini RM de règles régissant la composition correcte des « mots » ou « formules » du système, 3° en un ensemble fini RD de règles régissant la déduction d'un « mot » à partir d'un autre et 4° en un ensemble fini Ax d'axiomes.
Il convient de signaler que la philosophie des mathématiques ne précise pas toujours ce qu'elle entend par « formel ». Dans mon article, « formel » renvoie aux dimensions « désémantisation des signes» (« *de-semantification* » en anglais) et « occurrence uniquement matérielle des signes» (Dutilh Novaes e.a): Puisque les signes ne possèdent aucun sens, leur « existence » se limite à leur seule présence matérielle telle qu'elle est configurée sur le papier.
Considérons maintenant un système formels Sy_1 doté de l'alphabet $A_1 = \{*, £\}$ et un second système formel Sy_2 doté de l'alphabet $A_2 = \{\#, °\}$. Établissons entre A_1 et A_2 une relation biunivoque telle que $* \leftrightarrow \#$, $£ \leftrightarrow °$. Décrétons que sur ces bases, les ensembles de règles RM_1,RM_2, RD_1,RD_2, ainsi que les ensembles d'axiomes Ax_1, Ax_2 soient équivalents. Dans ces conditions, il existe une bijection $Sy_1 \leftarrow \Psi \rightarrow Sy_2$ qui attribue à toute opération effectuée dans Sy_1 une opération équivalente en Sy_2 et vice-versa. En raison de la désémantisation/occurrence uniquement matérielle des signes *, £, #, °, les deux systèmes Sy_1, Sy_2, en dépit de leur structure superposable, ne sont pas identiques. Ils sont en revanche *formellement équivalents.*
Appelons la bijection $Sy_1 \leftarrow \Psi \rightarrow Sy_2$ « équivalence formelle ».

Pour introduire la notion d'interprétation, considérons un univers U de propositions ayant un « sens ». Admettons qu'il existe une « domaine » ou « choix » D, $D \subset U$, étant doté d'un alphabet fini ou dénombrable A (ce point pose problème; cf. *infra*), d'un ensemble de « conventions » RM permettant de dénoter si un assemblage d'éléments de A a un sens dans D ou non, d'un ensemble RD régissant la déduction d'assemblages ayant un sens dans D – on dit alors « propositions de D » – à partir d'autres propositions de D, et enfin d'un ensemble d'axiomes Ax. (Contrairement aux systèmes formels Sy équivalents au niveau de leur structure, mais non-identiques en raison de leurs alphabets A matériellement différents, un domaine D censé exprimer un « sens » peut admettre plusieurs alphabets A, pourvu que les « conventions » réunies dans RM permettent de conserver un «sens » donné à travers toute substitution alphabétique. La notion de « convention » est bien entendu aussi vague que celle de « sens ».)
D est une interprétation de Sy s'il existe quatre bijections $A \leftarrow \Phi_A \rightarrow \mathrm{A}$, $RM \leftarrow \Phi_{RM} \rightarrow \mathrm{RM}$, $RD \leftarrow \Phi_{RD} \rightarrow \mathrm{RD}$, $Ax \leftarrow \Phi_{Ax} \rightarrow \mathrm{Ax}$.
Réunissons les quatre composantes bijectives Φ_A, Φ_{RM}, Φ_{RD}, Φ_{Ax} dans une bijection globale notée $D \leftarrow \Phi \rightarrow \mathrm{Sy}$.
Appelons « formalisation de D par Sy » la symétrisation de l'interprétation de Sy par D, décrétons que D est (dans notre contexte) un édifice mathématique constitué E, et notons cette formalisation $E \leftarrow \Phi \rightarrow \mathrm{Sy}$.

Se pose maintenant la question suivante: comment distinguer objectivement une équivalence formelle Ψ et une formalisation Φ ?
L'intuition nous dirait: La formalisation Φ représente une bijection entre un système formel véhiculant des signes arbitraires selon des règles elles aussi arbitraires et un domaine doté d'un sens, tandis que l'équivalence formelle Ψ se borne à relier deux systèmes formels Sy1, Sy2 étant chacun arbitraire et dépourvu de sens.
Or, tant que la notion de sens n'est élucidé de manière unanime – et encore – la distinction des Ψ et des Φ repose en dernier lieu sur des présupposés métaphysiques.

Ne pas vouloir faire de la métaphysique renvient donc à accepter – à légitimité égale – les deux options 1°« les Φ sont réductibles à des Ψ » et 2°« les Φ sont irréductibles à des Ψ ».
Appelons l'option 1° le « choix ultra-formel ».

Quant au choix n°2, j'essaie de montrer dans mon article que son adoption exige l'acceptation d'un présupposé heurtant apparemment le bon sens: Si les Φ sont irréductibles à des Ψ, les édifices mathématiques *E* doivent précéder les Sy sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique (Mlika, Quine). (Dans l'article, c'est beaucoup plus développé.)
Appelons l'option 2° le « choix platonicien ».
Chacun est maintenant libre d'opter pour le choix ultra-formel ou pour le choix platonicien. Le choix ultra-formel est sans doute plus facile à digérer. Mais en cas de son adoption, fait-on encore de la recherche dédiée aux fondements des mathématiques?

Dans le contexte pré-gödélien présupposant la possibilité d'une superposition exacte de *E* et de Sy *via* $\Phi \equiv \Phi_A, \Phi_{RM}, \Phi_{RD}, \Phi_{Ax}$, le point précédent se reformule de la manière suivante:

Pour opérer une formalisation de *E* par Sy au sens de Hilbert, on doit admettre que *E* précède Sy sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique.
Si on refuse que *E* précède Sy sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, on refuse du coup la possibilité d'une formalisation de *E* par Sy au sens de Hilbert.

Dans le contexte gödélien, la nécessité d'un choix entre les options soit ultra-formelle, soit platonicienne reste intacte.
Mais un second choix incontournable s'y ajoute.

L'impact du deuxième théorème de Gödel et de ses corollaires se résume dans notre contexte de la manière suivante: Pour un système formel Sy d'une puissance supérieure ou égale à celle de l'arithmétique formelle AF, les ressources internes de ce Sy sont insuffisantes pour prouver sa consistance. Toute preuve de la consistance de Sy recourt donc à des ressources extérieures à Sy. Autrement dit, la preuve « interne » de la consistance de Sy s'opère au détriment de la preuve de sa complétude et vice-versa.
En revanche, rien n'empêche l'établissement simultanée de la consistance *et* de la complétude de Sy par l'intégration de ce dernier dans un système plus puissant Sy_1, $Sy \subset Sy_1$. Bien entendu, Sy_1 doit être à son tour être intégré dans un système encore puissant Sy_2, $Sy_1 \subset Sy_2$ et ainsi de suite.

Certes, la proposition « Pour tout système formel Sy_n il existe un système Sy_n, $Sy_n \subset Sy_{n+1}$, tel que Sy_{n+1} assure la consistance *et* la complétude de Sy_n, et ce *ad infinitum* » est d'ordre métaphysique. Mais sa négation l'est autant. Les deux options sont chacune aussi légitime (ou illégitime, si on préfère) que l'autre. Là encore, le refus de toute métaphysique n'a d'autre issue qu'un choix assumé en tant que tel.
Appelons « choix conservatif » l'hypothèse de travail que la consistance et complétude de Sy sont assurées simultanément par un Sy_1, $Sy \subset Sy_1$, plus puissant, sachant que la consistance et complétude de Sy_1 sont assurées par Sy_2, $Sy_1 \subset Sy_2$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.
Mais on peut aussi se contenter d'une approche différente: Assurer la consistance et complétude de Sy par son intégration dans le système plus puissant Sy_1, tout en assumant que cette opération « bénéficiant » à Sy soit « payée » par la non-consistance ou la non-complétude de Sy_1 et par conséquent de $Sy \cup Sy_1$.
Appelons cette seconde approche le « choix non-conservatif », sachant que ce dernier donne lieu à des approches dites « déflationnistes ».

Tant que nous restons du côté des systèmes formels Sy véhiculant des signes arbitraires selon des règles elles aussi arbitraires, le choix non-conservatif, moins « coûteux » en matière de métaphysique, ne pose pas de problème particulier.
Mais les choses se compliquent lorsqu'on passe de la construction de systèmes formels à la formalisation, ou plutôt à ce qui peut rester de la formalisation au sens de Hilbert dans le contexte post-gödélien, tout en optant pour l'irréductibilité des Φ à des Ψ.

Dans mon article – ici, les détails iraient trop loin – j'essaie de montrer que:

1° Le choix non-conservatif cherchant à consolider *E* par Sy rendu consistant et complet par son intégration dans Sy_1, tout en assumant la non-consistance ou non-complétude de $Sy \cup Sy_1$, non seulement ouvre les portes à la confection de systèmes Sy1 « sur mesure », autrement dit, à des solutions *ad hoc* (à chacun de décider si cette approche s'inscrit encore réellement dans la recherche dédiée aux fondements mathématiques), mais encore entraîne un problème de fond: Les « vérités par disquotation », absolument légitimes au sein d'une approche formelle se fixant formellement ses modalités de démonstration, deviennent du côté des édifices mathématiques *E* des propositions n'étant ni des théorèmes, ni des non-théorèmes de *E.*
Ce n'est pas tout à fait exact, mais ce résumé je ne peut pas faire mieux sans faire trop long. De toute façon, le problème de fond rencontré va dans ce sens. Dans l'article, ce point est développé de manière plus technique.)

2° Quant au choix conservatif appliqué à ce qui peut rester intact de la formalisation hilbertienne, il présuppose le choix platonicien tel qu'il a été défini plus haut.
En effet, lorsque nous formalisons (au sens plus ou moins affaibli) *E* par Sy consolidé par Sy1,tout en optant pour irréductibilité des Φ à des Ψ, la *conservativity* ou *conservativeness* adoptée présuppose *par définition* que pour l'extension du système formel Sy à Sy_1, il existe « déjà » un édifice mathématique E_1 qui se prête à une extension de *E* à E_1 analogue à l'extension de Sy à Sy_1 .
En d'autres termes, l'édifice E_1 doit pré-exister à *E*, Sy et Sy_1 sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique.
Là encore, à chacun de choisir ente la réductibilité et l'irréductibilité des Φ à des Ψ.

Je termine – pour l'essentiel – mon article par une analyse de l'approche dite « instrumentaliste » de Michael Detlefsen et de la variante particulière du choix non-conservatif que cette approche traduit.
Detlefsen, pour faire bref, définit au sein des « mathématiques idéales » au sens de Hilbert un « résidu hilbertien » des mathématiques infinitistes qui serait consolidable par des procédés métamathématiques finitistes. Ce dossier est controversé.
Au cas où cela tiendrait, il est clair que pour pouvoir extraire à partir des mathématiques idéales infinitistes – non-maîtrisables par les ressources de la raison humaine dépassée par l'infini – un « résidu hilbertien » lui maîtrisable, les mathématiques idéales doivent non seulement déjà être là sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, mais encore être « préconfigurées » de la sorte que le résidu hilbertien maîtrisable en « émerge ». Dans l'article, ce point est lui aussi exposé de manière plus technique.