Systèmes formels et systèmes formalisés

Le « platonisme mathématique » en tant que dispositif de conceptualisation non-métaphysique

Peter Punin

I.S.T.H.
2, rue de Rémusat, F 75016 Paris
peter.punin@isth.fr

Résumé: Dans ce papier, nous cherchons à montrer 1° que dans le domaine des fondements mathématiques, le modèle platonicien peut faire fonction de dispositif de conceptualisation *dépouillé de toute connotation métaphysique*, et 2° que cette fonction s'avère indispensable dans les deux contextes pré-gödélien et post-gödélien.
Tenant compte du fait que Platon ne se retrouverait pas forcément dans ce que la postériorité tend à lui attribuer, nous pensons toutefois que l'ensemble des interprétations parfois abusives avancées tout au long de l'histoire de la philosophie à propos de l'œuvre platonicienne, représente désormais un édifice cohérent. Cet édifice que nous appelons – par opposition à l'œuvre platonicienne *stricto sensu* – « modèle platonicien standard de la connaissance » est amené à jouer dans le domaine des fondements mathématiques le rôle de dispositif de conceptualisation ci-dessus évoqué.
Étudiant les notions de *système formel* et de *système formalisé* dans l'optique hilbertienne revisitée sous l'angle de la théorie des modèles, nous verrons qu'une zone de flou s'étale entre ces deux notions. Toute démarche visant la maîtrise de cette zone de flou doit faire des *choix* épistémologiques qu'il s'agit d'assumer en tant que tels. Ces choix expriment systématiquement le schéma de l'opposition des complémentaires à exclusion réciproque « si a, alors b, *ou bien* si non-b, alors non-a ». A ce niveau, nous constaterons 1° que tout choix tranché entre a et non-b requiert des présupposés d'ordre métaphysique, 2° que le rejet de présupposés d'ordre métaphysiques empêche tout choix tranché entre a et non-b et 3° qu'au sein d'une approche non-métaphysique les options a et non-b sont équivalentes par rapport à la zone de flou affectant la distinction des notions de système formel et de système formalisé.
Loin de ce que l'intuition pourrait nous suggérer, le recours, à propos de ces choix épistémologiques, au modèle platonicien standard ne traduit nullement l'adoption d'un présupposé métaphysique parmi d'autres. Bien au contraire, dans le cadre d'une démarche *refusant tout présupposé métaphysique*, le modèle platonicien standard véhiculé à titre de dispositif de conceptualisation permet la systématisation globale de l'ensemble des choix épistémologique entre a et non-b possibles, choix équivalents en raison même du refus de toute référence métaphysique.
Ce point s'accommode parfaitement de l'aperception post-gödélienne « classique », i.e. non-déflationniste des fondements mathématiques.. Mais nous verrons également que les théories dites « déflationnistes » *au sens très large* – nous y rangeons aussi l'instrumentalisme hilbertien selon Michael Detlefsen – expriment à leur tour et probablement contre toute attente un choix épistémologique relevant du modèle platonicien standard.

Abstract: *In this paper, we try to show 1° that in the field of mathematical foundations the Platonic model can function as a conceptualization scheme* without any metaphysical connotations, *and 2° that this Platonic conceptualization scheme is essential in both pre-Gödelian and post-Gödelian contexts.*
Taking into account that Plato would not necessarily agree with what posteriority attributes to him, we believe, however, that the set of the sometimes abusive interpretations that have been advanced throughout the history of philosophy about Plato's work, henceforth represents a coherent structure. This intellectual edifice that we call the « standard Platonic model of knowledge» – as opposed to the strictly speaking Platonic work – is required to play the role of a conceptualization scheme in mathematical foundations discussed above.
Investigating the notions of formal system and formalized system from the hilbertian perspective reconsidered in terms of model theory, we will recognize a grey area spreads between these two notions. Any attempt to control this gray zone must do epistemological choices to be assumed as such. These choices systematically express the pattern « if a, then b, or if non-b, then non-a ». At this level, we will see 1° that any definitive choice between a or non-b requires metaphysical presuppositions, 2° that the rejection of metaphysical presuppositions prevents any definitive choice between a or non-b, and 3° that within a non-metaphysical approach, the options a and non-b are equivalent with respect to the grey zone affecting the distinction between formal systems and formalized systems.
Far from what intuition may suggest, the intervention of the standard Platonic model concerning these epistemological choices model is in no way limited to the adoption of a metaphysical presupposition among others. On the contrary, within an approach refusing any metaphysical assumptions, the standard Platonic model treated as a conceptualization scheme allows a global systematization of all possible epistemological choices about the distinction between formal systems and formalized systems, choices that precisely the rejection of any metaphysics makes equivalent.
This point accommodates perfectly the "classical", ie non-deflationary post-Gödelian apperception of mathematical foundations. But we will also see that even the deflationary theories in a much wider sense – we also include the Hilbertian instrumentalism according to Detlefsen in the deflationary theories – expresses in their turn and probably against all odds an epistemological choice falling within the standard Platonic model.

0. Introduction

Quiconque s'intéressant positivement au « platonisme mathématique » risque *a priori* d'affronter certaines difficultés. D'un côté, il ou elle a toutes les chances de s'attirer les foudres des pourfendeurs de « croyances métaphysiques » (comp. Fano & Graziani 2011, pp.21 ste.). D'autre part, on lui rappelle – à juste titre ! – que Platon aurait probablement du mal à se reconnaître dans le « platonisme » et plus spécialement dans le « platonisme mathématique » qui lui est couramment attribué (Cléro, 2004, pp. 34 ste., Harthong 1992, pp.1 ste.). Afin d'éviter des malentendus potentiels, ces deux points doivent être adéquatement traités. La tâche n'est pas spécialement aisée face au nombre de vérités et contre-vérités se noyant à ce propos dans des océans de mésentente réciproque.

Précisons dès maintenant que nous assumons sans réserve la différence manifeste entre l'œuvre de Platon telle qu'elle nous est parvenue à travers les dialogues qui ont pu être conservés, et ce qu'on entend par « platonisme » en général et par « platonisme mathématique » en particulier. Toutefois, ce qui est communément qualifié de « platonisme » et plus spécialement de « platonisme mathématique » forme bel et bien un système cohérent, doté d'un sens exprimant des liens intrinsèques avec le débat qui se poursuit dans le domaine des fondements mathématiques, bien que ce sens ne coïncide pas forcément avec les clichés – ni par ailleurs avec les contre-clichés – circulant à ce sujet au paradis des partis pris.

Certes, ce qui précède, semble précisément nous drosser vers de dangereux écueils métaphysiques. Dans son aperception courante, le « platonisme » – nous ne conservons ce terme qu'à titre provisoire (cf. *infra*) – prône l'« existence » indépendante de notre pensée d'un « ciel d'idées » où, à condition d'y accéder, nous trouverions la vérité. Sous cet angle, nous aurions effectivement affaire à une croyance métaphysique par excellence. Bien entendu, chacun est libre de faire autant de métaphysique qu'il le désire; la métaphysique n'étant tout de même pas une maladie honteuse. Néanmoins, le choix suivant semble s'imposer: Soit nous nous intéressons à la métaphysique, soit aux fondements des mathématiques. Vouloir « fonder » les mathématiques sur « l'existence d'un ciel d'idées » nous ferait inéluctablement tomber dans des croyances métaphysiques qui, sans représenter *a priori* quelque dérive mentale, ne s'accommodent ni de l'état d'esprit scientifique, ni des modalités opératoires de la recherche dédiée aux fondements mathématiques.

Et pourtant, le débat portant sur le « platonisme mathématique » est bien là. Selon Hamdi Mlika, cette conception philosophique a sa raison d'être et ne peut pas être balayée du revers de la main sous prétexte qu'elle serait pseudo-scientifique (Mlika 2007, p. 39). Mazur va jusqu'à intituler « La Question » le débat tournant autour du « platonisme mathématique » – « The Question » – non sans mettre une majuscule à la fois au nom commun et à l'article allant avec: « *If you engage in mathematics long enough, you bump in The Question, and it won't just go away.* » (Mazur 2008, p.1) D'autre part, le nombre élevé de remises en cause de l'approche « platonicienne », réfutations d'ordre tantôt logico-épistémologique (Benacerraf, 1973, pp. 668 ss.) tantôt cognitives (Ruelle, 1999, p.2, 3ss.), ainsi les âpres controverses inaugurées à ce propos par Carnap et Gödel (Awodey & Carus 1999, pp.1ss., 4ss.), tout cela semble disproportionné à l'égard du principe ancestral selon lequel une seule démonstration ou réfutation devrait suffire pour démontrer ce qui démontrable ou – à plus forte raison – pour réfuter ce qui est réfutable. On évoque très souvent Philip J. Davis et Reuben Hersh selon lesquels le « mathématicien travaillant » (« *working mathematician* ») serait « platonicien » au quotidien et « formaliste » le week-end (Davis & Hersh, 1981, p. 321). S'y ajoute une citation de Dieudonné, prise de position inattendue de la part d'un porte-parole de Bourbaki: « *En ce qui concerne les fondements, nous croyons à la réalité des mathématiques, mais évidemment, quand les philosophes nous attaquent avec leurs paradoxes, nous courons nous cacher derrière le formalisme et disons 'La mathématique n'est qu'une combinaison de symboles privés de signification'. Puis nous sortons les chapitres 1 et 2 des* Éléments de la théorie des ensembles. *Finalement, on nous laisse en paix retourner à nos mathématiques, et faire ce que nous avons toujours fait, travailler avec quelque chose de réel.* » (cité *in* Boniface, 2004, p.8). Le dossier, dirait-on, tend quelque peu à devenir schizophrène: La

Question, pour reprendre la formulation de Mazur, s'invite bien au débat interne engagé à propos des fondements mathématiques, mais en abordant – dans un sens ou dans l'autre – La Question, nous cesserions de nous occuper des fondements mathématiques en tant tels pour cause de déviation métaphysique.
Il existe toutefois une issue à cette situation schizoïde: Se référer au « platonisme » en matière de fondements des mathématiques ne signifie pas forcément vouloir « fonder » les mathématiques *sur* le « platonisme ».
Plus précisément, nous chercherons à montrer dans ce papier que la référence au « platonisme », y compris le « platonisme mathématique – référence qui ne se réduit pas au simple rejet du « platonisme » et ne nous oblige pas davantage d'y « croire » – représente un dispositif de conceptualisation nécessaire 1° pour élucider la spécificité des systèmes mathématiques *formalisés* à l'égard systèmes *formels*, sachant que cette élucidation opère sur un terrain miné de confusion et de malentendus potentiels, et 2° pour assurer la cohérence de ce qui peut rester intact quant à la formalisation (au sens large/affaibli) des systèmes mathématiques dans un contexte de fragilité post-gödélienne qu'il s'agit d'assumer définitivement en tant que tel.
Sur ce, le présent papier se lance le défi de recourir à des interférences (provisoirement) qualifiées de « platoniciennes », sans jamais tomber dans une quelconque croyance, métaphysique ou autre.

Nous procéderons de la manière suivante:
Dans un premier temps, nous nous efforcerons de cerner brièvement ce qu'on doit entendre par *ce* « platonisme » où Platon aurait peut-être du mal à se retrouver. Afin de rendre explicite la non-congruence caractérisée entre la philosophie platonicienne telle qu'elle nous est transmise par les Dialogues et ce qu'on appelle communément « platonisme », nous substituerons à « platonisme » l'expression plus adéquate, moins ambiguë de « *modèle platonicien standard de la connaissance* ».
Dans le cadre de ces séquences, nous tenterons de montrer que les *spéculations* – car au départ, il s'agit bien entendu de *spéculations* à présenter comme de telles – réunies dans le « modèle platonicien standard de la connaissance » atteignent en la version du « modèle » dite « *platonisme mathématique* » un niveau élevé de cohérence globale et que ce niveau élevé de cohérence globale permet de convertir ces spéculations en dispositif de *conceptualisation* opérant sur le terrain des fondements mathématiques.
Sur ces bases, nous confronterons par la suite le « modèle platonicien standard de la connaissance » en sa version dite « platonisme mathématique » à son *apparente* négation, en l'occurrence le soi-disant « formalisme » *attribué* – de manière souvent assez caricaturale – à David Hilbert (comp. Zach. 2005, p. 31). Pour commencer, nous reprendrons la notion de système formel; non pas pour enfoncer des portes ouvertes dans un domaine où, semble-t-il, tout a été fait, mais pour déceler certaines difficultés que le « formalisme », s'il veut rester fidèle à ses principes et conceptions, éprouve nécessairement face à la démarche appelée « formalisation » qui sera précisée comme un cas particulier de l'interprétation au sens de la théorie des modèles. Ne voulant pour le moment pas anticiper sur des développements difficiles à résumer en quelques mots, nous constaterons le moment venu que le « formalisme » attribué à Hilbert, pour rendre *opérante* la distinction des notions « système formel » et « système formalisé » – zone de flou à l'origine de nombreux malentendus potentiels – doit recourir à une *conceptualisation* relevant du « modèle platonicien standard de la connaissance », tandis que le refus de ce genre de conceptualisation – un choix bien entendu légitime en soi – réduirait la distinction des systèmes formels et des systèmes formalisés à une sorte d'équivalence non-significative de ces deux catégories de systèmes et minerait la cohérence du « formalisme » censé rester fidèle à ses principes et conceptions.
Ce passage de l'attitude classique à l'égard du « modèle platonicien standard de la connaissance », en l'occurrence l'adhésion ou la non-adhésion à une croyance, à l'attitude tout à fait différente admettant le choix possible entre 1° l'adoption d'une *conceptualisation* relevant du « modèle » et assurant la cohérence du « formalisme », et 2° le renoncement à la cohérence du « formalisme » suite au refus d'une *conceptualisation* relevant du « modèle », ce passage d'une attitude à une toute autre sera d'abord exposé dans un cadre faisant abstraction de l'orage gödélien portant un coup fatal

au « formalisme » décliné en les termes de son projet initial. Mais par la suite, nous verrons – *sans* nous appuyer sur la « conviction » – par ailleurs largement controversée (Avodey & Carus, 1999,pp.2 ss.; plus spécialement. p.11; Vidal-Rosset, 2005, pp. 2 ste., pp.7 ss.) – de Gödel que ses théorèmes d'incomplétude prouvent la « réalité » du monde platonicien (Gödel, 1951, p. 323.) – que l'orage gödélien, tout en mettant fin au « formalisme » en sa forme initiale, souligne le lien intrinsèque entre la conceptualisation relevant du « modèle platonicien standard de la connaissance » et la démarche de formalisation d'un édifice mathématique cohérente vis-à-vis d'elle-même.
Au bout de notre parcours, nous constaterons enfin que les approches qualifiées de « déflationnistes », censées contourner l'écueil gödélien – nous y adjoignons également l'instrumentalisme hilbertien de Michael Detlefsen – expriment elles aussi, en dépit (ou plutôt en raison?) de leur refus de tout recours à des présupposés métaphysiques, et contre toute attente un choix épistémologique relevant du modèle platonicien standard.

1. Du « modèle platonicien standard de la connaissance » au « platonisme mathématique »

1.1 A propos de la nécessité de distinguer le « modèle platonicien standard de la connaissance » de l'œuvre philosophique de Platon ; justification du « modèle standard »

Nous venons de le dire et ne le répèterons jamais assez : Platon ne se reconnaîtrait pas forcément dans le modèle de connaissance qu'on lui attribue couramment. Il est sûr et certain que « *la postérité s'est (...) servie de Platon de façon assez impertinente, étiquetant souvent de platonisme des thèses plus ou moins cohérentes, mais de toute façon assez éloignées de celles qu'on trouve ou croit trouver dans les* Dialogues *et dans les* Lettres. » (Cléro, 2004, p. 28) Autrement dit « *il faut reconnaître, avec des auteurs modernes qui nous ont appris à le voir, que la tradition a attribué à Platon des thèses qui ne se trouvent pas explicitement dans les textes qu'on lui attribue et qu'elle nous a contraints à projeter sur eux des interprétations que les signes dont nous disposons ne nécessitaient pas.* » (Cléro, 2004, pp. 34 ste.). Mentionnons encore, non sans anticiper un peu sur la suite, le mathématicien Jean Harthong selon lequel « *le platonicien ou platoniste affirme que le monde physique est un reflet d'un monde idéal qui existe ontologiquement, et où les lois sont exactes et de nature mathématique, tandis que dans le reflet l'exactitude des lois mathématiques est corrompue par la présence de matière, de sorte que les lois sont seulement approchées*. » (Harthong 1995, p. 5), mais qui « *soupçonne* [également] *que la question de l'ontologie des idées a été ajoutée par les philosophes chrétiens.* » *(ibid.)* [Si la] *« caractéristique la plus universellement célèbre de la philosophie platonicienne est ce qu'on appelle l'idéalisme platonicien,* (...) *cet aspect du platonisme est si célèbre qu'il est devenu un cliché, ce qui a pour conséquence que sa véritable signification s'est effacée.* » (Harthong 1995, p. 49).
Attardons-nous quelques instants sur le riche potentiel de malentendus généré par la dénomination « *idéalisme platonicien* » à laquelle d'autres préfèrent substituer « *réalisme d'idées* ». Le vocabulaire philosophique communément admis entend par « réalisme » la thèse affirmant l'existence de la réalité (sous-entendons « réalité matérielle ») indépendamment du sujet connaissant qui l'aperçoit. Par opposition, « idéalisme », au sens philosophique du terme, regroupe l'ensemble des conceptions selon lesquelles le sujet connaissant configure *d'une manière ou d'une autre* la réalité aperçue. Les deux expressions « réalisme d'idées » et « idéalisme platonicien » s'avèrent ainsi l'une et l'autre déroutantes vis-à-vis de ce que la philosophie comprend habituellement par « réalisme » et « idéalisme ». A travers le prisme de l'aperception courante du « platonisme », le « réalisme d'idées » ou, *si on préfère*, l' « idéalisme platonicien » prônent l'existence indépendante de tout sujet connaissant d'une réalité immatérielle. Ce point se prête à

confusion en ce sens qu'un « non-philosophe de métier » pourrait y déceler une sorte d'équivalence entre l'immatériel et le matériel. Ce malentendu potentiel prend une ampleur particulièrement dévastatrice lorsqu'on passe du « platonisme 'tout court' » au « platonisme mathématique » (comp. Mlika 2007, pp. 36 ste.), mais l'analyse de ce point nous mènerait trop loin.
Pour le moment, retenons et *assumons* que la philosophie de Platon n'est pas forcément congruente à ce que la postérité en fait.
Or, bien que Platon probablement ne se reconnaisse pas dans ce qu'on entend *couramment* par « platonisme », cette aperception « courante » du « platonisme » non seulement est positivement présente dans histoire de la pensée, mais encore a fini par s'imposer sous forme de système cohérent. Même des propos attribués abusivement à un auteur et/ou issus d'une interprétation abusive de son œuvre peuvent avoir une signification jouant un rôle effectif – et constructif – dans le cadre du *débat* concerné (comp. Cléro, 2004, p. 28, pp.37 ss.). Enfin, nous ne devons pas exclure *a priori* l'éventualité qu'une interprétation faite *a posteriori* de l'œuvre de Platon – interprétation peut-être abusive *au premier degré*, – n'augmente la cohérence de ladite œuvre, notamment en y dégageant des liens, voire en y ajoutant des éléments qui ont pu échapper à l'auteur 1° par son inévitable manque de recul et 2° en raison du contexte intellectuel de son époque. Quoi qu'il en soit, c'est à cette aperception « courante » et si on veut « abusive » du « platonisme » que de nombreux partisans du « platonisme mathématique » – à commencer par Cantor – se réfèrent de manière plus ou moins consciente, plus ou moins tacite.(comp. Harthong 1995, p. 50; comp. Bernays 1935, p.3). Nous devons ainsi tenir compte du fait que le « platonisme » tel qu'il nous intéresse ici représente une très lointaine *reformulation* de la philosophie de Platon. Par conséquent, il semble adéquat d'affecter à cette reformulation une étiquette *dénotant* et *assumant* l'écart potentiel entre la philosophie *de* Platon en tant que telle et ce que la postérité en a fait.

1.2 Des grandes lignes du modèle platonicien standard de la connaissance au « platonisme mathématique »

Nous appelons donc « *modèle platonicien standard de la connaissance* » la *conception* qui, en ses grandes lignes se résume de la manière suivante : 1° les éléments constituant la réalité matérielle accessible aux cinq sens – le « monde sensible » – ne seraient que des *représentations grossières et imparfaites* d'« idées » se cachant derrière. 2° Ces « idées » immatérielles, immuables et éternelles, existant *indépendamment de la pensée humaine* constitueraient le « monde intelligible » ou « ciel des idées ». 3° C'est au niveau de ce monde intelligible que se situerait la vérité. 4° Cette vérité ne pourrait être percée que par une démarche purement intellectuelle faisant abstraction des cinq sens, ces derniers restant enfermés dans les apparences du monde sensible.
Ces grandes lignes du modèle platonicien standard suffisent amplement pour cerner la motivation originaire de la déclinaison mathématique de ce modèle.

1.21 L'« état d'esprit » de la géométrie élémentaire en tant qu'illustration potentielle du modèle platonicien standard de la connaissance

Au premier abord, le modèle platonicien standard de la connaissance, dirait-on, heurte le bon sens. Tout d'abord, notre pensée, conditionnée par ses habitudes intellectuelles, si elle qualifie bien spontanément d'évidente l'existence du monde sensible – le dossier s'avère pourtant bien moins simple qu'il ne le semble – éprouve en revanche beaucoup de mal à concevoir l'existence de données immatérielles (comp. Linnebo, 2006, p. 546; comp. Mazur 2008, p. 2). D'autre part, l'écart sémantique entre la signification courante du terme « idée » et ce que le « modèle platonicien standard de la connaissance » entend par là ne facilite pas les choses. Selon nos conceptions courantes, les « idées » n'existent que dans notre tête. Comment concilier cette émanation du « bon sens » avec l'assertion du « modèle platonicien standard de la connaissance » stipulant l'existence d'« idées » indépendamment de notre pensée? De même, nous changeons, semble-t-il, souvent d'« idée». Comment pourrait-on qualifier ces dernières d'«immuables » ? Pour être « éternelles », nos « idées » devraient survivre à notre mort inéluctable, mais où et comment ? Enfin, le langage courant dénote par l'expression « j'ai une idée (là-dessus) » une vision spontanée, provisoire, approximative, superficielle de quelque-chose que nous ne parvenons souvent pas à cerner d'une manière entièrement suffisante. Comment, dans ces conditions, concevoir des « idées » qui, d'après le modèle platonicien standard, exprimeraient des vérités et même la Vérité avec un v majuscule? Bref, le « bon sens » aurait beaucoup de mal à s'accommoder du modèle platonicien standard de la connaissance ».

Nous disposons pourtant d'une piste facilitant l'appréhension de la nature du modèle platonicien standard de la connaissance, et ce bien mieux que l'allégorie de la caverne tant de fois rabâchée.

Il suffit de penser à l'émergence de l'état d'esprit propre à la géométrie élémentaire, émergence dont Platon est plus ou moins témoin, bien que notre vision contemporaine des choses ne soit pas à l'abri d'interférences rétro-projectives qu'il s'agit d'assumer au nom de la distinction de l'œuvre de Platon et du modèle platonicien standard de la connaissance .

Avant d'aller plus loin, il convient que nous nous mettions d'accord à propos de cet « état d'esprit propre à la géométrie élémentaire ». En première approximation – ce qui est suffisant à *ce stade de notre parcours* – il s'agit de l'adhésion aux thèses suivantes : 1° L'acquisition de connaissances géométriques par des opérations empiriques, voire expérimentales portant sur des figures effectivement tracées peut et doit être dépassée par une démarche purement intellectuelle visant des figures et leurs propriétés en tant qu'entités relevant de l'idéalité. (A ce propos, il est inutile de répéter une fois de plus la différence entre la « géométrie empirique » des Égyptiens, Sumériens etc. et l'« authentique » géométrie des Grecs.) 2° Dans le cadre de cette démarche purement intellectuelle, le recours à des figures effectivement tracées n'a pas d'autre finalité que de guider la raison dans ses inférences. 3° Les figures effectivement tracées ne sont que la matérialisation *grossière et imparfaite* de l'idéalité qu'elles sont censées représenter, mais étant donné leur rôle *essentiellement accessoire* dans l'exercice de la raison, la démarche propre à la géométrie élémentaire non seulement peut se contenter de telles matérialisations grossières et imparfaites, mais se doit encore en quelque sorte de souligner leur côté accessoire par un tracé de figures expressément approximatif.

Sur ces bases, nous pouvons maintenant nous tourner vers l'interprétation « naïve » des fondements de l'édifice mathématique en des termes de modèle platonicien standard de la connaissance. Notons encore au passage que la (trop) célèbre inscription Q*ue nul n'entre ici s'il n'est pas géomètre* qui aurait figuré – à l'initiative de Platon – sur le fronton de l'Académie athénienne, relève très probablement de la légende. Dans un article portant un titre évocateur, Henri-Dominique Saffrey parle d'une « *prétendue inscription* » (Saffrey 1968, p. 71). Mais l'auteur poursuit en les termes suivants: « *Or,* [bien que] *d'une historicité douteuse, cette prétendue inscription* (…) *est bien dans son fond d'inspiration platonicienne* (…) ». (*ibid.*). Appartenant par son statut de fiction au « modèle platonicien standard de la connaissance » et non pas à la philosophie *de* Platon, l'inscription « virtuelle » contribue à la cohérence du modèle, puisque l'état d'esprit de la géométrie élémentaire ci-dessus esquissé nous fournit une première approche assez intuitive du « ciel des idées éternelles, immuables, immatérielles » existant au-delà de la matière et indépendamment de notre pensée. En effet, lorsque nous traçons soi-disant « une droite », la figure tracée – une entité matérielle appartenant au monde sensible – n'est que la *représentation grossière et imparfaite d'une idée*. Une droite conforme à l'état d'esprit de la géométrie élémentaire est infiniment longue dans les deux sens, infiniment fine, infiniment lisse etc., elle possède des caractéristiques essentielles que notre tracé ne saurait reproduire. Certes, à ce stade, rien encore ne nous indique pourquoi les « idées », y compris les figures géométriques, existeraient « indépendamment de notre pensée ». Au contraire, la droite, et par extension toute la géométrie élémentaire animée de l'« état d'esprit » ci-dessus évoqué, ne semblent exister que « dans notre tête ». Pourtant, c'est moins simple. En raison même de son état d'esprit ci-dessus esquissé, la géométrie élémentaire s'intéresse non pas aux figures en tant que telles, mais aux théorèmes dont ces figures sont le support. Ces théorèmes, à l'instar des figures qui leur servent de substrat, relèvent des « idées » au sens du « modèle platonicien standard de la connaissance ». Si maintenant nous nous interrogions si on « invente » ou

plutôt « trouve »/« découvre » un théorème, la conception traditionnelle des mathématiques – certes remise en cause de nos jours – opterait spontanément pour « trouver »/« découvrir ». Or, pourrait-on « découvrir » ou « trouver » quelque-chose qui n'existerait pas préalablement à la découverte ?
Sous cet angle – mais attention, les propos précédents *ne prouvent absolument rien* – une conception prônant l'existence indépendamment de notre pensée d'idées immatérielles, immuables et éternelles qui représenteraient la vérité, devient *plausible*, plus envisageable que l'aperception courante du terme « idée » ne le suggère. Insistons sur la la signification de « plausible », dénotant simplement l'envisageable du seul point de vue de la cohérence. Nous venons de préciser qu'il n'est pas question à ce niveau de « prouver » quoi que ce soit. Bien au contraire, l'opposition « trouver/découvrir v/s inventer » mentionnée plus haut résume à elle seule la controverse entre « platoniciens » et « anti-platoniciens », controverse objectivement présente sur le terrain des recherches dédiées aux fondements des mathématiques (Mazur, 2008, pp.1 ss.) et dont nous devons assumer la présence en tant que telle. Ici, nous remarquons simplement qu'à travers l'analyse du « platonisme mathématique élémentaire» – l'expression est légitime à condition qu'elle soit *explicitement* référée au modèle platonicien standard de la connaissance et non pas à la philosophie *de* Platon – la conception d'un corpus d'idées « vraies » existant « objectivement », i.e. indépendamment de notre pensée n'apparaît plus d'emblée tirée par les cheveux. L'inscription légendaire (cf. *supra*) réservant l'entrée à l'Académie au « géomètre » souligne que l'adhésion à l'état d'esprit de la géométrie élémentaire représente la première étape quant à l'appropriation du modèle platonicien standard de la connaissance en général.
Quant au « platonisme mathématique » tel que nous le cherchons à cerner ici – l'expression est à son tour utilisée à titre provisoire – il s'écarte en quelque sorte de l'inscription virtuelle de l'Académie athénienne. Dans le cadre du platonisme global, la partie mathématique du modèle platonicien standard de la connaissance est censée nous donner juste une première idée du ciel des idées, autrement dit, représenter le socle d'un édifice essentiellement spéculatif. Quant au platonisme mathématique visé en tant que finalité en soi, son statut et sa fonction épistémologique sont bien différents: Tandis que le « ciel platonicien d'ordre supérieur » supposé englober des « idées suprêmes », notamment le « bien », le « beau » et le « vrai », relève d'une *croyance* que nous sommes libres de partager ou non, la partie mathématique du modèle platonicien standard de la connaissance *se prête davantage à la discussion argumentée*. La question, si un théorème est « découvert » ou alors « inventé », « fabrique » etc. se *discute.* Rappelons que selon Mazur, cette discussion relève de La Question – The Question – à double majuscule. Le sourire condescendant dont maints pourfendeurs de métaphysique gratifient l'argumentation « pro-platonicienne » du genre « bien avant l'apparition de l'homo sapiens sapiens, les centres de gravité de trois cailloux trainant dans les parages formèrent déjà un triangle à la somme angulaire égale à deux angles droits », ce sourire n'est pas forcément partagé par un astrophysicien qui, lorsqu'il étudie une galaxie loin de trois milliards d'années-lumière, admet du moins tacitement que les mathématiques nécessaires à l'expression des lois de sa discipline fussent déjà « vraies » il y a trois milliards d'années, donc « indépendamment de la pensée humaine ». Nous reviendrons là-dessus (cf. séqu. 2.311).
Bref, la « platonisme mathématique », loin de se réduire à l'objet de diverses croyances, se prête à une *discussion* qu'on ne peut guère balayer du revers de la main (comp. Mlika 2007, p.39).
Quoiqu'il en soit, à partir de maintenant, lorsque nous évoquons le « modèle platonicien standard de la connaissance », nous sous-entendons par là – sauf indication explicite d'une option différente – le « modèle platonicien standard de la connaissance *en sa déclinaison mathématique*», ou, si on préfère, «platonisme mathématique inscrit dans le modèle platonicien standard de la connaissance».

1.22 Les trois dimensions ontologique, logique et épistémologique du modèle platonicien standard de la connaissance

Ceci dit, nous n'avons pas encore fait le tour complet de toutes les dimensions du platonisme mathématique inscrit dans le modèle standard. *Du point de vue du modèle standard*, le statut de « découverte » – et non pas d'« invention » – des entités mathématiques confère à ces dernières en dépit de leur aspect immatériel une existence objective. A ce titre, le platonisme mathématique comporte une *dimension ontologique* qui, semble-t-il, représente le principal point de focalisation des approches courantes (Mlika 2007, p. 39). Pourtant, la description exhaustive de l'édifice ne peut pas se réduire à cette seule dimension ontologique. La notion de démonstration qui – toujours du point de vue du modèle standard – relève elle aussi de l'existence « objective » d'entités immatérielles indépendante de notre passée, établit également la connexion logique entre ces entités. A la dimension ontologique du modèle platonicien standard de la connaissance s'ajoute ainsi une *dimension logique* (Mlika 2007, p. 39). Enfin, lorsque nous évoquons une « démonstration », nous sous-entendons « démonstration *accessible* la pensée humaine » et *restituable* par cette dernière; en d'autres termes, le platonisme mathématique prône l'existence d'entités immatérielles en soi , mais qui se prêtent – du moins en partie – à la connaissance . Sous cet angle, le platonisme mathématique recouvre une troisième *dimension d'ordre épistémologique*. Nous nous apercevons de la sorte que le modèle platonicien standard de la connaissance, loin de se réduire à un « réalisme d'idées » ou « réalisme conceptuel », constitue un édifice de pensée tridimensionnel à la fois ontologique, logique et épistémologique cohérent (comp. Mlika 2007, p. 39).

Maintenant, il n'est bien entendu pas question de « fonder » l'édifice mathématique en tant que tel sur le modèle platonicien standard de la connaissance. En dépit de sa cohérence, le modèle standard renvoie à un système de croyances métaphysiques à partir du moment où on affirme positivement que ce modèle correspond à quelque-chose d'«existant réellement ». Et même s'il semble péremptoire de dénier d'emblée toute signification au platonisme mathématique inscrit dans le modèle standard – « l'antiplatonisme, écrit H. Mlika, doit se rendre compte que le platonisme mathématique possède quelque part une justification dans notre culture scientifique (…), et le fait de le réduire à une simple position pseudo-scientifique ou métaphysique relève d'un certain non-sens, car les nombres et les classes sont bien là et ont bien une place (…) dans nos pratiques les plus courantes. » Mlika 2007, p. 39) – si donc d'une façon ou d'une autre, le platonisme mathématique a voix au chapitre dans la *discussion* à propos des fondements de l'édifice mathématique en tant que tel, il serait bien *naïf* de concevoir le platonisme mathématique *en soi* comme une entité constitutive de la recherche de fondements mathématiques telle qu'elle s'est configurée à partir de la seconde moitié du 19ème siècle. Nous verrons en revanche que le platonisme mathématique devient *ipso facto* un incontournable *dispositif de conceptualisation* lorsque la recherche dédiée aux fondements des mathématiques *doit* opérer une différentiation claire et distincte entre systèmes formels et systèmes formalisés afin d'éliminer la confusion régnant à ce propos. Nous constaterons que sous cet angle, la ci-dessus mentionnée naïveté tend à s'estomper.

1.23 Vers la transformation du modèle platonicien standard de la connaissance *spéculatif* en dispositif de conceptualisation

Le modèle platonicien standard de la connaissance, tant qu'il affirme l'existence objective des entités mathématiques et des relations que ces entités entretiennent entre elles, relève de la philosophie spéculative. Comment transformer ce système spéculatif en dispositif de conceptualisation destiné à une utilisation hors métaphysique?

La réponse, ou plutôt l'amorce de réponse exige un petit détour et même une certaine anticipation sur la suite (cf. séqu. 3.11).

Dans le cadre de l' élucidation de la zone de flou s'étalant entre les notions de système formel et de système formalisé, nous confronterons la vulgarisation de l'approche de David Hilbert des fondements mathématiques à ce que cette approche veut réellement dire. Aux yeux de la vulgarisation défigurant l'œuvre Hilbert, tout édifice mathématique « *est* » un système de signes dépourvus de signification, assemblés selon des règles arbitraires. Quant à l'approche de Hilbert au-delà de la vulgarisation, elle « fait comme si » tout édifice mathématique *était* – attention au

conditionnel – un système de signes dépourvus de signification, assemblés selon des règles arbitraires, ce représente bien autre chose. En attendant d'affiner ces propos quelque peu lapidaires évoquant les fameux système de signes dépourvus de signification, assemblés selon des règles arbitraires etc., retenons le schéma de pensée « comme si », « *so als ob* », « *as if* » (Zach, 2005, p.20).
Quant à la transformation du modèle platonicien standard de la connaissance initialement système spéculatif en dispositif de conceptualisation non-métaphysique, elle procède – certes dans un contexte différent – de la même manière: Il suffit que nous fassions *comme si* tout édifice mathématique précédait son appréhension humaine sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique.
L'approche *as if* de Hilbert a un sens. La recherche dédiée aux fondements doit de nombreux acquis déterminants à ce *as if*, des acquis dont une vaste part a survécu à l'orage gödélien(Zach, 2005, p. 2 ss.). Dans le présent travail, nous tenterons de montrer qu'une approche *as if* du modèle platonicien standard de la connaissance a elle aussi un sens et que ce sens n'a absolument rien en commun avec le souhait de « fonder les mathématiques » sur quelque « ciel des idées platonicien ».
Abordé à un niveau basique, le rôle d'une approche *as if* du modèle platonicien standard saute littéralement aux yeux: Un(e) adversaire déclaré(e) du « platonisme mathématique » en tant que croyance métaphysique qui voudrait d'une façon ou d'une autre prouver l'inadéquation d'une telle croyance, doit dans un premier temps faire « comme si » cette croyance correspondait à quelque réalité pour ensuite y dégager les éléments défaillants.
Mais en fait, le potentiel d'une approchées *as if* du modèle platonicien standard va beaucoup plus loin. Nous verrons au fur et à mesure de notre progression que le modèle platonicien standard véhiculé à titre de dispositif de conceptualisation s'avère constructif quant à l'effort de maîtriser la zone de flou s'étalant entre les notions de système formel et de système formalisé; zone de flou non pas engendrée mais certes amplifiée l'irrémédiable désastre gödélien tout en affectant les théories dites «déflationnistes » qui cherchent à contourner le désastre en dépouillant le concept « vérité mathématique » précisément de toute connotation métaphysique.

2. Systèmes formels et systèmes formalisés

2.0 « Platonisme mathématique » v/s « formalisme » ?

Nous allons maintenant situer le « platonisme mathématique » – tel que nous venons de le cerner – par rapport à l'approche qui *selon les apparences* s'y oppose diamétralement, en l'occurrence le soi-disant « formalisme » *attribué* à David Hilbert. Selon ce « formalisme » (trop) souvent schématisé de manière franchement caricaturale pour reprendre les termes de Richard Zach (Zach, 2005, p. 31), l'édifice mathématique reposerait sur des présupposés « arbitrairement choisis » et relèverait conséquemment lui-même de l'« arbitraire ».
Ce n'est certainement pas aussi simple (comp. Corry, 2006, p.1700). Ce que nous avions avancé à propos du gouffre séparant la pensée de Platon de ce que la postérité en a fait, nous pouvons et devons le reprendre en ce qui concerne Hilbert, à un détail près qui change tout. Tandis que la confrontation avec Platon a fait émerger, au fil des siècles, le ci-dessus mentionné « modèle platonicien standard de la connaissance » *cohérent en soi* surtout en ce qui concerne son émanation dite « platonisme mathématique », la pensée de Hilbert fait encore de nos jours l'objet de confusions multiples amalgamant les notions de formalisme, de système formel et de système formalisé. C'est notamment à ce niveau que les représentations communes de l'approche de Hilbert relèvent de la caricature (*ibid.*).
C'est la « décaricaturisation » de l'approche de Hilbert qui nous fera découvrir progressivement le rôle essentiel du modèle platonicien standard de la connaissance en tant que dispositif de conceptualisation non-métaphysique.
Précisons d'emblée qu'il est plutôt pénible de percer la nature de « formalisme » hilbertien au-delà

de sa caricature courante. Parmi tous les courants qui s'affrontent en matière des fondements mathématiques, le « formalisme » est probablement celui qu'on évoque le plus. Néanmoins, ce courant est aussi celui qui a été le moins clairement défini (Simons, 2012, pp. 1 ste.). L'ampleur des malentendus tournant autour du « formalisme » n'a donc rien d'étonnant. L'élucidation du concept « formalisme » exige un fastidieux travail d'élaboration qui occupe directement ou indirectement une bonne part du présent papier.

Notre priorité du moment consiste en la définition des concepts « système formel » et « système formalisé ». Sur ces bases, nous lancerons l'interrogation – essentielle dans notre contexte – quant à la distinction des deux concepts. Mais, en attendant, essayons déjà de dégager – du moins en ses grandes lignes – la nature de l'amalgame dont Hilbert reste l'objet.

2.01 L'amalgame affectant le formalisme attribué à Hilbert

Selon la vulgarisation, les édifices mathématiques, d'après le formalisme « de » Hilbert, « *sont* » des systèmes purement formels constitués de signes dépourvus de sens assemblés selon des règles arbitraires. La notion de système formel dépasse bien entendu cet énoncé aussi rudimentaire que réducteur; nous reviendrons là-dessus (cf.2.31; 3.11). D'ici là, contentons-nous de la formulation « selon la vulgarisation, les édifices mathématiques *sont* des systèmes dépourvus de sens intrinsèque ». Or, cette vision des choses n'est pas partagée par le seul grand public. Peter Simons, faisant allusion aux célèbres propos de Davis et Hersh (Davis et Hersh, 1981, p.321) évoque le nombre « étonnamment élevé » de mathématiciens qui, spontanément « platoniciens » dans leur travail quotidien, souscrivent allègrement «durant le week-end » à la vision selon laquelle les mathématiques consisteraient en la manipulation formelle, obéissant à des règles « arbitrairement » prescrites, de symboles essentiellement dépourvus des sens. (Simons, 2012, p.3).

Si Hilbert voyait les choses de la sorte, autrement dit, si Hilbert exprimait la *conviction* que les édifices mathématiques « *sont* » de simples systèmes formels, l'étiquette « formalisme » accolée à sa pensée serait pertinente. Tel qu'il est l'orthographié, le terme « formalisme » entre dans la catégorie des « -ismes », et on sait que le suffixe « -isme » dénote dans notre contexte un courant intellectuel basé sur une *conviction philosophique*. C'est à ce niveau que l'amalgame affectant l'œuvre de Hilbert commence à se dévoiler. Chez Hilbert, la notion de système formel n'est en aucune façon l'objet d'une *conviction philosophique*, quelle que soit-elle. Pour Hilbert, le système formel globalement arbitraire et dépourvu de sens intrinsèque représente un *outil* dédié à une *démarche* précise, censée consolider les édifices mathématiques après-coup. Pour des raisons qui seront précisées, Hilbert – nous avions déjà effleuré ce point dans la séquence (cf. 1.23) – *fait comme si* les édifices mathématiques *étaient* des systèmes formels. Sans aucun rapport avec la conviction philosophique affirmant que les édifices mathématiques « sont » des systèmes formels, ces derniers entrent chez Hilbert dans une *démarche* définie dans un but précis. Nous sommes donc loin d'un quelconque « -isme ».

Quant à la bonne compréhension de la démarche hilbertienne étiquetée fort improprement de « formal*isme* », elle passe la distinction des concepts « système formel » e « système formalisé » opérée sur fond d'un « platonisme mathématique » dépouillé de toute dimension « métaphysique » et véhiculé à titre purement conceptuel. A l'inverse, les nombreux *a priori* que la seule expression « platonisme mathématique » continue d'inspirer jouent sans doute un rôle déterminant dans l'amalgame à propos de la démarche hilbertienne improprement réduite à un « formal*isme* ».

2.1 Définitions fondamentales et premières interrogations

Nous reprenons maintenant l'ensemble des définitions correspondant aux concepts « système formel », « interprétation d'un système formel» et ainsi de suite, non pas pour enfoncer des portes ouvertes, mais pour élucider une zone flou qui – au-delà de ce qu'on trouve certes dans n'importe quel manuel de logique mathématique – fluctue autour de la notion de formalisation. Car s'il semble aisé de présenter la formalisation d'un système axiomatisé (comp. Snapper, 1979, pp.212

ste.) comme un cas particulier de l'interprétation au sens de la théorie des modèles, la *spécification* de la formalisation d'un édifice mathématique par rapport à l'interprétation en général se heurte à des problèmes de fond. C'est dans ce contexte qu'interviendra le modèle platonicien standard de la connaissance à titre d'élément de conceptualisation.

2.11 Système formel

La notion de système formel s'avère déjà bien moins évidente qu'il ne le semble au premier abord. Pour commencer, remarquons que la philosophie des sciences véhicule allègrement l'adjectif « formel » sans forcément s'inquiéter de la polysémie rattachée à cet adjectif (Dutilh Novaes, 2011, pp. 304 ss.; comp. Béziau, 2008, pp. 4 ss.). Face à un vaste spectre de significations potentielles du terme, une investigation telle que la nôtre est amenée à renvoyer l'adjectif « formel » aux deux dimensions de la « désémantisation » et de la matérialisation des signes en tant que telle (Dutilh Novaes, 2011, pp. 318 ss.). En effet, le dépouillement d'un signe donné de tout sens réduit l'« existence » de ce signe 1° à sa présence matérielle sur un support et 2° à sa configuration *matérielle* déterminant – à elle seule et à l'exclusion de toute autre option – ce que le signe « est » et ce qu'il « n'est pas ». Contrairement à ce qu'on pourrait penser, l'« existence » « désémantisée » des entités formelles réduites à leur seule matérialité soulève des interrogations où la délimitation du non-métaphysique vis-à-vis du métaphysique devient délicate et dans l'absolu impossible. Dans le cadre de notre investigation, ce point posera ultérieurement problème en ce qui concerne la spécification de l'interprétation au sens de la théorie des modèles par rapport à l'établissement d'équivalences formelles (cf. séqu.2.121); problème dont l'élucidation fera à son tour appel au modèle platonicien standard de la connaissance en tant que dispositif de conceptualisation.
Ceci dit, tournons-nous maintenant vers la structure logique d'un système formel.
Selon l'acceptation générale, un système formel **Sy** est constitué 1° d'un « alphabet » **A**, i.e. d'un ensemble fini ou dénombrable de signes $\mathbf{A} = \{\ldots, S_i, \ldots\}$, 2° d'un ensemble fini $\mathbf{Rm} = \{\ldots, Rm_i, \ldots\}$ de règles Rm_i dédiées à l'assemblage des signes $S_i \in \mathbf{A}$, de la sorte que ces assemblages représentent des « mots » (ou « termes », ou « formules ») M_i « correctement écrit(e)s», 3° d'un ensemble fini de règles de déduction noté $\mathbf{Rd} = \{\ldots Rd_i, \ldots\}$, régissant la transformation d'un mot M_i (voire d'un groupement de mots M_i) en un autre mot M_j et enfin 4° d'un ensemble fini de mots correctement écrits $\mathbf{Ax} = \{\ldots, Ax_i, \ldots\}$ satisfaisant aux critères suivants: a) Aucun $Ax_i \in \mathbf{Ax}$ n'est déductible selon **Rd** à partir d'un quelconque $Ax_j \in \mathbf{Ax}$, $i \neq j$, ni d'un groupement de plusieurs $Ax_j \in \mathbf{Ax}$, et b) aucun $Ax_i \in \mathbf{Ax}$ n'est déductible selon **Rd** à partir d'un mot M_i (ni d'un groupement de mots M_i correctement écrit(s) et déduit(s) selon **Rd** à partir de $Ax_j \in \mathbf{Ax}$ ou d'un groupement de plusieurs $Ax_j \in \mathbf{Ax}$. Les mots Ax_i forment alors l'ensemble **Ax** des axiomes du système formel **Sy**. D'une manière compacte, un système formel prend la forme $\mathbf{Sy} = (\mathbf{A}, \mathbf{Rm}, \mathbf{Rd}, \mathbf{Ax})$. Ce qui précède nous amène à spécifier parmi toutes les combinaisons de signes S_i possibles dans **Sy** 1° l'ensemble **Mce** des mots correctement écrits, 2° l'ensemble **Mcd** des mots correctement écrits et déduits d'un autre mot et 3° l'ensemble **Th** des mots correctement écrits et déduits dont la chaîne de déduction remonte à un axiome $Ax_i \in \mathbf{Ax}$ de **Sy** ou à un groupement de Ax_i. L'ensemble **Th** regroupe les théorèmes Th_i du système **Sy**. Pour des raisons qui se préciseront, le statut de théorème d'un mot donné $M_n \in \mathbf{Mcd}$ exige une définition plus formelle: $M_n \in \mathbf{Th} \Leftrightarrow \exists \{M_{n-1}, M_{n-2}, \ldots, M_0\} \subset \mathbf{Mcd}$ tel que $\forall i$, $n \leq i \geq 1$, $M_i \leftarrow M_{i-1}$ et $M_0 \in \mathbf{Ax}$. Afin de ne pas alourdir le texte, nous nous permettons de nos limiter à des déductions en série $M_i \leftarrow M_{i-1}$, autrement dit, de faire abstraction de la déduction d'un M_i à partir d'un groupement de plusieurs M_j, $i \neq j$. Substituons maintenant « D_i » à « $M_{i-1} \rightarrow M_i$ »; cela nous permet de définir de manière très compacte la *démonstration* $\ldots D_{i-1} \rightarrow D_i \ldots$ $(n = 1, \ldots, n)$ d'un théorème $Th_i = M_n$ comme l'ensemble $\mathbf{D(M_n)} = \{D_n, \ldots, D_1\}$, $D_1 = M_0 \rightarrow M_1$, $M_0 \in \mathbf{Ax}$. Le naturel n marque ainsi la *longueur* de la démonstration $\mathbf{D(M_n)}$; longueur *essentiellement finie*. Ce point est déterminant quant à la suite.
Avant de passer au cœur de notre présente démarche, l'interprétation d'un système

formel et la zone de flou que cette notion engendre, construisons à titre d'exemple un **Sy** = (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**) donné.
Comme alphabet, nous posons **A** = {σ , *}. **Rm** se limite à une règle unique: tous les assemblages de σ , * sans espace et d'une longueur finie sont admises comme mots « correctement formés », néanmoins avec une condition restrictive: Le nombre $n_σ$ des σ doit être supérieur ou égal au nombre n_* des *. Posant « μσ » et « μ* » respectivement pour « mot se terminant par σ » et « mot se terminant par * », nous formulons les deux règles de déduction Rd_1 et Rd_2 formant **Rd** ; Rd_1 : μσ → **μσσσσ* et Rd_2 : μ* → μ*σσσ. Nous admettons enfin deux axiomes constituant **Ax**, $Ax_1 \equiv$ σ* et $Ax_2 \equiv$ *σ.
L'assemblage σσ*****σ* ne représente pas un mot correctement formé, puisque $n_σ$ y est strictement inférieur à n_*. « σ***σσσ » est correctement écrit, mais non pas un théorème, car incorrectement déduit de l'axiome σ*. La déduction σ*σ*σ***σ → **σ*σ*σ***σσσσσ*, en tant que telle, est correctement effectuée. Pourtant « **σ*σ*σ***σσσσσ* », bien que correctement formé, n'est pas un théorème, puisque « σ*σ*σ***σ », avec n* > $n_σ$, viole l'unique règle de formation des mots. Quant aux axiomes Ax_1 et Ax_2 , ils peuvent être validés. L'un comme l'autre sont correctement formés. Selon les deux règles de déduction Rd_1 et Rd_2 , Ax_1 ne se déduit pas Ax_2 , et réciproquement. De même, les règles Rd_1 et Rd_2 empêchent la déduction de Ax_1 et de Ax_2 à partir de n'importe quel mot du système. Il est donc légitime de déduire des théorèmes à partir de Ax_1 et de Ax_2 : σ* → σ*σσσ → **σ*σσσσσσ* → **σ**σσσσσσ**σσσ → … … et *σ → **σσσσ* → **σσσσ*σσσ → ****σσσσ*σσσσσσ → … … .
Introduisons maintenant la notion de décidabilité d'un système formel **Sy**. Désignons par « D_i » la « procédure de décision » permettant de déterminer si un mot correctement écrit M_i est aussi correctement déduit d'un prédécesseur M_{i-1} . En d'autres termes, « D_i » ≡ «M_i ←oui/non M_{i-1} ». Un système formel **Sy** est dit « décidable », si pour tout mot M_n , il existe une chaîne de longueur finie D_n ← D_{n-1} … … déterminant si M_n est un théorème ou un non-théorème. Si M_n est un théorème, la chaîne D_n ← D_{n-1} … … se confond avec la démonstration $\mathbf{D(M_n)}$ = $\{M_{n-1}, M_{n-2}, \ldots, M_0\} \subset$ **Mcd** tel que $\forall i, n \leq i \geq 1$, $M_i \leftarrow M_{i-1}$ et $M_0 \in$ **Ax**.

2.12 Interprétation d'un système formel selon la théorie des modèles

Intuitivement parlant, l'interprétation **I**(**Sy**) selon la théorie des modèles d'un système formel **Sy** donne un « sens » aux assemblages de signes de selon la théorie des modèles effectués de manière certes règlementé, mais arbitraire; assemblages de signes qui, par définition, n'ont pas de « sens propre».
Cette intuition exige une expression plus formelle qui nous permettra de mieux cerner certaines problématiques occultées par la zone de flou entourant la notion d'interprétation.
Considérons 1° un système formel **Sy** = (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**) et 2° un univers **U** de propositions P_j « ayant un sens ». Tout en assument pour le moment le côté (expressément) vague des propos regroupés sous « 2° » (cf. *infra*), nous définissons un domaine **D**, **D** ⊂ **U**, censé avoir les propriétés suivantes: 1° Il existe un ensemble fini ou infini et dénombrable de signes S_i constituant l'alphabet « de référence » **A** du domaine **D**, sachant que **A** peut et doit admettre des **A'** « équivalents » (cf. *infra*). 2° Il existe une « convention **C** » permettant de reconnaître le sens communément attribué à un assemblage M_i si ce sens existe, ou bien de classer M_i parmi les assemblages dépourvus de sens. Nous identifions aux propositions P_i de **D** les assemblages M_i ayant un sens selon **C**. (Ce dernier point s'avère de toute évidence épineux et, plus précisément, relève d'un *problème de fond* figurant parmi les principaux enjeux du présent article, problème qui, semble-t-il, n'a pas été suffisamment relevé. Nous y reviendrons sous peu (cf. 2.2).) En attendant, notons **P**(**D**) l'ensemble des assemblages de signes S_i de **D** ayant un sens selon **C** 3°. Il existe un « schéma d'inférence » R_{Dd} régissant la déduction M_i ← M_{i-1} . 4° Il existe un ensemble fini **Ax** de propositions Ax_i n'étant pas déductibles des $Ax_j \in$ **Ax**, ni des P_j telles que $P_j \neq Ax_i$, mais qui sont néanmoins

« considérées » comme 'vraies' ». Selon nos préférences terminologiques, nous pouvons appeler ces Ax_i « axiomes », « postulats », « présupposés » ou tout ce que nous voulons (cf. *infra*).
Des tournures du genre « alphabet de référence A pouvant être remplacé par des notations équivalentes A' », « convention C permettant de reconnaître le sens communément attribué à un assemblage P_i », « schéma d'inférence R_{Dd} régissant la déduction $P_i \leftarrow P_{i-1}$ », « propositions Ax_i considérées comme 'vraies » etc. comportent une bonne dose de *flou* générant nécessairement un malaise épistémologique caractérisé. Il ne peut pas en être autrement. La *formalisation* d'un édifice mathématique que nous cernerons sous peu comme cas particulier de *l'interprétation* qu'il s'agit pour le moment d'élucider, a précisément la vocation de mettre plus de rigueur dans le flou propre à la structure logique d'un domaine D *formalisable* tant que ce dernier n'est pas *formalisé*. Le génie de David Hilbert s'exprime – entre autres – par l'élaboration d'une *démarche* allant en ce sens. (Snapper ,1979, p.214).
Le domaine D (ou le « choix de D», selon certaines formulations) ainsi caractérisé est une interprétation I du système formel **Sy** (notons de manière plus compacte: « $D = I(\mathbf{Sy})$) si et seulement si 1° il existe une *bijection* Φ_A attribuant à chaque signe $S_i \in \mathbf{A}$ un $S_i \in A$ ou à un signe « équivalent » $S_{i'} \in A'$ (cette « équivalence » – problématique sous certains rapports (cf. *infra*) sera élucidée ultérieurement – 2° une bijection Φ_M : $\forall i$, $M_i \in \mathbf{Sy} \leftarrow \Phi_M \rightarrow P_i \in P(D)$ attribuant à chaque mot « correctement écrit » du système formel **Sy** une proposition P_i ayant dans le domaine D un sens selon C et *vice-versa*; 3° une bijection Φ_D : $\forall i, D_i \in \{ \ldots, D_j , \ldots \} \leftarrow \Phi_D \rightarrow Dd_i \in Dd = \{ \ldots, Dd_j , \ldots \}$, où l'ensemble $\{ \ldots, Dd_j , \ldots \}$ regroupe les déductions $P_i \leftarrow P_{i-1}$ correctes de/dans D notées Dd_i, sachant que nous avions désigné par « D_i » la déduction « $M_{i-1} \rightarrow M_i$ » de/dans le système formel **Sy**. (nous choisissons l'écriture « Dd_i, » pour éviter toute confusion avec la notation « D » communément adoptée pour « domaine ».), 4° il existe une bijection Φ_{Ax} : $\forall i$, $Ax_i \in \mathbf{Sy} \leftarrow \Phi_{Ax} \rightarrow Ax_i \in Ax \subset D$ attribuant à chaque axiome Ax_i du système formel **Sy** un Ax_i présupposé irréductible et considéré comme « vrai » dans le domaine D.
En posant $\mathbf{\Phi} \equiv \{\Phi_A, \Phi_M , \Phi_D ,\Phi_{Ax}\}$, nous obtenons une notation compacte «$D = I(\mathbf{Sy}) \Leftrightarrow \exists \mathbf{\Phi}, \mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Phi} \rightarrow D$ » qualifiant D d'interprétation de **Sy**.
Attirons l'attention sur le fait que dans la bijection globale $\mathbf{\Phi}$ telle que nous venons de la concevoir, la composante **Rm** = $\{\ldots, Rm_i , \ldots\}$ régissant du côté de **Sy** la formation de « mots » corrects M_i , renvoie dans D à des « conventions C » permettant de reconnaître le sens communément attribué à un assemblage P_i si ce sens existe, ou bien de classer P_i parmi les assemblages dépourvus de sens. Nous verrons sous peu que ce point appartient aux difficultés relevant de la zone floue entourant la notion d'interprétation; zone de flou représentant précisément l'enjeu principal de la présente séquence.
En attendant, acceptons la bijection $\mathbf{\Phi}$ telle que nous l'avons établie ci-dessus. A condition d'exister, $\mathbf{\Phi}$ permet d'associer à chaque chaîne déductive $\ldots, M_i \leftarrow M_{i-1} , \ldots$ de **Sy** une chaîne déductive $\ldots , P_i \leftarrow P_{i-1} , \ldots$ de D et réciproquement. Si et seulement si une chaîne $P_n \leftarrow P_{n-1} , \ldots , P_0 , P_0 \in Ax$ est l'image bijective d'une chaîne $M_n \leftarrow M_{n-1} , \ldots, M_n$, $M_0 \in Ax$, la proposition P_n est formellement démontrée dans D par rapport au système formel **Sy**. Par abus de langage, P_n peut alors être qualifiée de théorème de D. Le « degré d'abus » dépend des caractéristiques de D.

2.121 Des zones de flou entourant le concept « interprétation »

Dans la séquence (2.12), nous avions évoqué 1° une « convention C » qui, au sein de D censé interpréter **Sy**, permet de reconnaître le sens communément attribué à un assemblage P_i si ce sens

existe, ou bien de le classer P_i parmi les assemblages dépourvus de sens. Nous y avons également souligné le *flou* entourant nécessairement ces propos. 2° Nous y avons encore mis en relief le *côté vague* caractérisant des propos tels que « Il existe un « schéma d'inférence R_{Dd} » régissant la déduction $P_i \leftarrow P_{i-1}$ au sein de **D** interprétant **Sy** ». 3° Nous y avions insisté sur le fait qu'un système formel **Sy** possède un alphabet **A** arrêté une fois pour toutes (cf. *infra*). Bien qu'il soit possible d'établir des *conventions d'abréviation* permettant de substituer tel ou tel élément simplifié à des combinaisons complexes de signes $S_i \in$ **A**, c'est l'alphabet **A** qui, en dernier lieu reste l'ultime base « existentielle » du système **Sy**. Du côté de **D** en revanche, nous avons un alphabet ***A*** « pouvant et devant admettre des ***A'*** équivalents » conservant **D** *à l'identique*. 4° Mais nous ne devons surtout pas négliger un autre écueil figurant implicitement parmi les propos précédents: Sachant que le système formel **Sy** repose sur un quadruplet **Sy** = (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**), la bijection **Φ** comportant conséquemment quatre composantes Φ_A , Φ_M , Φ_D , Φ_{Ax} , prend du côté **Sy** et *via* Φ_M un « départ » dans des « règles Rm régissant la formation de mots correctement écrits », pour « arriver » du côté **D** dans des « *conventions* ***C*** » d'un statut épistémologique nécessairement différent des Rm_i : Répétons à dessein que ces « conventions ***C*** » permettent – sont censées permettre – de reconnaître le « sens communément attribué » à un assemblage P_i dans le cas de l'existence ce sens, ou alors de classer P_i parmi les assemblages dépourvus de sens, tandis que du côté **Sy**, la question du sens ne se pose pas.
Les points 1°, 2°, 3° et 4° sont étroitement liés et relèvent d'une même problème, en l'occurrence la finalité en soi du formel au niveau de **Sy** opposée à la primauté du sens à l'égard du formel au niveau de **D** .
Ces propos exigent quelques explications. Pour un système formel **Sy**, en vertu de sa notation **Sy** = (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**), l'alphabet **A** est « partie 'existentiellement' constitutive » du système. Lorsque nous modifions **A**, le système formel **Sy** *par définition* ne reste en aucun cas le « même ». N'oublions pas que pour un système « désémantifié », l'«existence » de ce dernier se décale entièrement vers la matérialité. (Dutilh Novaes, 2011, pp. 318 ss.) Deux systèmes *formels* qu'un seul et unique détail différencie matériellement ne sont donc pas identiques. Nous pourrions certes – à titre d'exemple – remplacer dans l'alphabet **A** = {σ , *} du système formel **Sy** construit plus haut, le signe σ par ω et le signe * par ∞ . En effectuant les substitutions correspondantes chez les axiomes Ax_i et règles Rm_i, Rd_i, – cela donne **Ax'** = { ω∞, ∞ω}, Rm' = « on admet comme mot correctement écrit toute combinaison sans espace des signes ω, ∞ , avec n(ω) ≥ n(∞); Rd_1' : ω → ∞∞ ωωωω∞, Rd_2' : ∞ → ∞ωωω – nous construisons un système formel **Sy'** dont les structures sont formellement équivalentes à celles de **Sy**. Il est en effet possible d'établir entre **Sy** et **Sy'** une bijection **Ψ** englobant les quatre composantes **A** $\leftarrow \Psi_A \rightarrow$ **A'**, **Ax** $\leftarrow \Psi_{Ax} \rightarrow$ **Ax'**, **RM** $\leftarrow \Psi_M \rightarrow$ $\mathbf{R_m}$**'** et **RD** $\leftarrow \Psi_D \rightarrow$ $\mathbf{R_d}$**'** . Mais, d'après ce qui précède, cette *équivalence formelle* **Ψ** de **Sy** et de **Sy'** ne peut pas être réduite à leur *identité*.
Notons au passage que **Sy'**, non-identique à **Sy**, n'est pas davantage une interprétation de **Sy**, puisque **Sy'** est à son tour un système véhiculant des signes arbitraires individuellement et globalement dépourvus de sens, tandis qu'une interprétation **I**(**Sy**) est supposée conférer un « sens » au système formel **Sy** qui en tant que tel en est dépourvu. Ce point sera repris ultérieurement.
Mais, en attendant, retenons – quittes à nous répéter en partie – que pour les deux systèmes **Sy** et **Sy'** où la combinaison de signes matériels représente *la* finalité en soi, leur équivalence formelle **Ψ** à irréductible à leur identité différencie essentiellement les **Sy** à l'égard des domaines **D**, sachant toutefois que cette distinction reste affecté d'une zone de flou. Puisqu'un domaine **D** véhicule un sens – ou plus précisément un agrégat de sens que le système formel **Sy** interprété par **D** est censé organiser (cf. *infra*) – pour le moment, nous faisons abstraction de l'horizon gödélien limitant la portée d'une telle démarche – l'assemblage de signes, pour **D**, n'est plus une finalité en soi. Dans la mesure où diverses écritures ***A*** , ***A'*** , ***A''***, … transcrivent de manière *équivalente* le « sens » véhiculé

par **D**, ces variantes « scripturales » de **D** sont *identiques par rapport au « sens »* de **D**, et comme c'est ce sens de **D** qui importe ici, nous pouvons même nous permettre de dire que ces variantes « scripturales » de **D** sont « identiques tout court ». Admettons, en anticipant un peu, que le domaine **D** prenne la forme d'un édifice mathématique **E**. Pour tout édifice mathématique **E** *supposé* consistant (cf. *supra* en ce qui concerne l'horizon gödélien), nous pouvons reprendre la bijection **Ψ** que nous avions introduite pour **Sy** et **Sy'**, en substituant à l'alphabet **A** de **E** un **A'** « certifié » par Ψ_A équivalent à **A**; en vertu de son sens global, **E** reste alors **E**.
Le changement de statut épistémologique de la bijection **Ψ** selon qu'elle opère sur des **Sy**, **Sy'** ou des **E** , **E'** identiques au niveau de leur sens quoique rédigés en des **A**, **A'** différents, s'ajoute à d'autres conséquences bien tangibles du passage d'un **Sy** à un **E**.
Considérons dans notre système formel *stricto sensu* **Sy** un « théorème » erroné Th_n que nous marquons « ##(Th_n) » . Le côté « ## » de Th_n repose *exclusivement* sur une erreur formelle au sein de la chaîne déductive $M_n = \#\#Th_n \not\in Th \leftarrow \dots M_i \leftarrow M_{i-1} \dots \leftarrow M_0 \in Ax$, comme par exemple sur $M_n = \#\#Th_n \leftarrow \dots \#\#M_j \leftarrow M_{j-1} \dots \leftarrow M_0$. Autrement dit, l'erreur d'écriture affectant M_n , ou si on préfère, $\#\#Th_n$, est *consubstantielle* à toute la chaîne déductive $M_n = \#\#Th_n \leftarrow \dots \leftarrow \#\#M_k \dots \leftarrow \#\#M_j$, et *réciproquement*. L'adjectif « consubstantiel » doit ici être pris au pied de la lettre, puisque dans le contexte d'un système formel **Sy**, nous avons affaire à des axiomes et règles portant sur le maniement de signes *matériels*. D'un autre côté, la théorie des systèmes formels repose en partie sur la distinction *explicite* 1° de l'ensemble **Mce** des mots correctement écrits de **Sy** et de l'ensemble **Mnon-ce** des mots non-correctement écrits, 2° de l'ensemble **Mcd** des mots correctement déduits de **Sy** et de l'ensemble **Mnon-cd** des mots non-correctement déduits et enfin 3° de l'ensemble **Th** regroupant les théorèmes Th_i de **Sy** et de l'ensemble **nonTh** des non-théorèmes. De ce point de vue, $\#\#Th_n$ a sa *raison d'être au sein de la théorie des systèmes formels* en tant que représentant de l'intersection des ensembles **Mce** ∩ **Mcd** ∩ **nonTh** relevant de **Sy**. Il en est de même quant à la chaîne déductive $\#\#M_n \leftarrow \dots \leftarrow \#\#M_k \dots \leftarrow \#\#M_j$ servant d'exemple de déduction correcte en soi, sans pour autant aboutir à un théorème.
Comparons maintenant sous cet angle le système purement formel **Sy** à un édifice mathématique **E** doté de sens, supposé (toujours sous toutes réserves concernant l'horizon gödélien sur lequel nous reviendrons) interpréter **Sy**. Considérons un ouvrage où **E** est exposé. Au cas où une faute d'impression se serait glissée au milieu de la démonstration d'un théorème Th_n de **E**, faute d'impression qui modifierait la typographie d'un théorème Th_j $(j < n)$ figurant dans la démonstration de Th_n , il s'agirait alors simplement d'une coquille, sans aucune signification relative à la *théorie de démonstration*. En revanche, au sein d'un système formel *stricto sensu* **Sy**, toute coquille affectant un théorème donné Th_n transforme ce dernier *de facto* soit en *exemple* de mot non-correctement écrit, soit en *exemple* de mot correctement écrit mais non-correctement déduit des axiomes, soit en *exemple* de théorème Th_n' différent de Th_n. Malgré lui, l'effet de la coquille recouvre cette fois-ci une signification caractérisée, signification relative à la théorie des systèmes formels. N'hésitons pas à rappeler une fois de plus qu'il ne peut pas en être autrement quant à un système formel qui, en raison même de la désémantification, décale son « existence » vers la présence matérielle des signes en tant que tels (Dutilh Novaes, 2011, pp. 304).
Du côté de **E**, nous ne trouverions aucun intérêt à écrire des expressions correctement formées et correctement déduites sans être des théorèmes, contrairement à **Sy** où un tel exercice représente effectivement un intérêt précis relevant justement de la « nature » formelle du système. Notons que dans **Sy**, par exemple le nôtre figurant plus haut, l'écriture d'un mot correctement formé et correctement déduit d'un mot précédent sans être un théorème de **Sy** exige déjà un certain effort intellectuel, plus précisément une confrontation avec les axiomes, règles de formation des mots et règles de déduction. Certes, rédiger un mot de **Sy** correctement formé, par exemple

$**\sigma*\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma****\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma$ n'est pas compliqué puisqu'il suffit de respecter la règle n(*) > n(σ). Mais pour que nous soyons certain(e)s que $**\sigma*\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma****\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma$ n'est effectivement pas un théorème de **Sy**, les opérations requises s'avèrent déjà moins spontanées. Au sein d'un édifice mathématique **E** ayant un sens global, il peut être à son tour techniquement difficile de savoir si une constellation de signes mise sous nos yeux représente un théorème ou non. Si, en revanche, on nous demande d'écrire une déduction correcte n'étant pas un théorème, là, nous retrouvons aussitôt la spontanéité absolue: « (1+1 = 11 ⇒ 2(1+1) = 22) » représente dans l'arithmétique intuitive 1° une expression correctement formée et 2° une déduction correcte. Dans ce cas de figure, nous n'avons pas besoin de longues et pénibles séquences d'enchaînement formel pour savoir que notre assertion n'est pas un théorème de l'arithmétique intuitive. Il suffit de nous référer au *sens* de l'assertion. Lorsque Werber – dans le but honorable en soi d'« ébranler nos certitudes » – « démontre » dans son « *Encyclopédie du savoir absolu et relatif* » que 1 = 2, quiconque s'intéressant aux mathématiques ressent aussitôt l'envie de trouver la faute dans la prétendue démonstration; faute dont nous savons *d'emblée* qu'elle y est. Cette faute – chaque collégien sait ou devrait savoir qu'il s 'agit de *la* faute à ne pas commettre – est vite détectée: Au sein de la « démonstration » figure un dénominateur égal à zéro, certes habilement camouflé. Mais, quoi qu'il en soit, pour trouver la faute dans ce type de texte qui, à l'opposé d'un système formel **Sy**, n'est pas un assemblage de signes selon les règles arbitraires, nous devons bel et bien nous référer au « sens » de la « démonstration », aussi aberrant que ce sens puisse être.
Depuis Frege, le flou entoure le concept « sens ». Dans notre contexte centré sur la notion d'interprétation de **Sy** par **E** , ce flou se traduit dans un premier temps par les difficultés suivantes:
Étant donné 1° que le sens d'un édifice mathématique **E** constitué conserve à ce dernier son identité à travers des notations équivalentes, par opposition à des systèmes formels équivalents en vertu d'une bijection **Ψ** qui, par définition et donc en raison de leurs alphabets **A**, **A'**, **A''** différents ne sont pas identiques, 2° que ce même sens d'un édifice mathématique **E** y fait d'une faute de frappe précisément une simple faute de frappe corrigible en soi, contrairement au système formel **Sy** où une coquille d'un côté affecte le système en tant que tel et d'autre part engendre dans certaines conditions des déductions correctes qui, sans être de théorèmes, sont prises en compte à *ce* titre, et 3° qu'une interprétation **D** = **I**(**Sy**), *par définition*, confère un sens à **Sy**, sachant que du coup **D** doit « avoir » un sens que **Sy** n'a pas, la bijection **Sy** ← **Φ** → **D** relie à travers ses composantes Φ_A , Φ_M , Φ_D , Φ_{Ax} deux entités essentiellement *différentes* sur *les trois plans logique, ontologique et épistémologique*, formulation qui évoque les trois dimensions ontologique, logique et épistémologique que nous avions déjà rencontrées à propos de l'expression mathématique du modèle platonicien standard de la connaissance, ou, plus brièvement, du « platonisme mathématique ». Mais nous n'y sommes pas encore. Pour aller plus loin, nous devons approfondir la notion de « sens » qui manifestement complique l'élucidation de l'interprétation de **Sy** par **D** , étant donné que nous ne pouvons aborder le concept « formalisation d'un édifice mathématique selon la démarche hilbertienne » tant que l'autre concept plus vaste « interprétation » n'est pas consolidée vis-à-vis de l'*écueil du sens* ».

2.2 L'écueil du « sens »

2.21 L'hiatus du formel et du sens

Récapitulons: Nous avions défini une interprétation **D**(**Sy**) par la bijection **Sy** ← **Φ** → **D** tout en postulant que **D** possède un « sens » détectable . A côté de la bijection **Φ** nous avons également introduit une seconde bijection **Ψ** qui relie le système formel **Sy** à un autre système formel **Sy'** de la sorte que tout signe S_i de **Sy** soit bijectivement relié à S_i' de **Sy'**, tout en conservant sur ces bases des **Ax**, **Rm**, **Rd** et **Ax**, **Rm**, **Rd** analogues pour les deux systèmes. Les systèmes **Sy**, **Sy'**, **Sy''** … ainsi formés étant non pas identiques mais *formellement équivalents*, rien ne nous empêche de concaténer $\mathbf{\Psi}$ et $\mathbf{\Phi}$, de la sorte que :

$$\mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Psi} \rightarrow \mathbf{Sy'} \leftarrow \mathbf{\Psi'} \rightarrow \mathbf{Sy''} \leftarrow \mathbf{\Psi''} \rightarrow \mathbf{Sy'''} \leftarrow \mathbf{\Phi} \rightarrow \mathcal{D} \qquad (2\text{-}1)$$

Se pose maintenant la question suivante: Comment effectuer dans l'expression (2-1) une distinction formelle de la bijection $\mathbf{\Phi}$ vis-à-vis des $\mathbf{\Psi}$, ' $\mathbf{\Psi}$ ", $\mathbf{\Psi}$ "' équivalentes entre elles? Comment dénoter que $\mathbf{\Phi}$ n'est pas une $\mathbf{\Psi}$, ' $\mathbf{\Psi}$ ", $\mathbf{\Psi}$ "' ... « comme les autres » ? La réponse « par le fait que $\mathbf{\Phi}$ renvoie à $\mathcal{D}$ doté d'un « sens », tandis que les $\mathbf{\Psi}$, ' $\mathbf{\Psi}$ ", $\mathbf{\Psi}$ "' … font la connexion entre des **Sy**, **Sy'**, **Sy''**, **Sy'''** … arbitraires » n'est pas réellement satisfaisante, tant que la notion de « sens » échappe à la formalisation.
Si maintenant, pour contourner cet inconvénient, nous essayons de *réduire* $\mathbf{\Phi}$ et $\mathcal{D}$ à des entités purement formelles, nous réduisons de la sorte (2-1) à

$$\mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Psi} \rightarrow \mathbf{Sy'} \leftarrow \mathbf{\Psi'} \rightarrow \mathbf{Sy''} \leftarrow \mathbf{\Psi''} \rightarrow \mathbf{Sy'''} \leftarrow \mathbf{\Psi'''} \rightarrow \mathbf{Sy''''} \qquad (2\text{-}2)$$

où $\mathbf{\Phi}$ est transformée en $\mathbf{\Psi'''}$ et $\mathcal{D}$ en **Sy''''**. Mais cette option ne nous avance pas davantage. Bien au contraire, notre tentative de maîtrise du concept « interprétation d'un système formel **Sy** par un domaine $\mathcal{D}$ » s'empêtre dans une sorte de cercle vicieux. Soit nous conférons *via* $\mathcal{D}$ un « sens » à **Sy**, quittes à assumer le flou entourant la notion de « sens ». Ou alors nous focalisons sur le seul côté formel de $\mathcal{D}$; cette démarche nous épargne peut-être les affres du « sens », mais du coup ôte à l'interprétation ce qui fait précisément de l'interprétation une interprétation. Appelons « hiatus du formel et du sens » le cercle vicieux engendré par la conjonction des expressions (2-1)(2-2). Cet hiatus se manifeste de manière particulièrement flagrante au sein de tout édifice mathématique où il est très difficile, voire impossible de tracer objectivement la délimitation entre le sens et le formel.

2.22 La pré-existence logique du sens véhiculé par l'interprétation $\mathcal{D}$ = I(Sy)

Il va de soi que dans une interprétation, le sens *pré-existe sur le plan sémantique* au système purement formel. Puisque l'interprétation $\mathcal{D}$ = I(**Sy**) est supposée « donner un 'sens' » à **Sy**, ce « sens » doit bel et bien pré-exister à **Sy** en tant qu'entité sémantique. Or, ce qui précède (séquences 2.121; 2.21) entraîne une autre conséquence: La pré-existence du « sens » par rapport au système formel **Sy** faisant l'objet de l'interprétation par $\mathcal{D}$ est d'ordre non seulement sémantique, mais encore *logique* : Tandis qu'un système formel **Sy** « tient » formellement par lui-même, qu'on lui attribue une interprétation ou non, une interprétation, si elle veut émerger du système formel **Sy** projeté dans $\mathcal{D}$ *via* $\mathbf{\Phi}$, a besoin de ce « sens » qui différencie $\mathbf{\Phi}$ de l'infinité des $\mathbf{\Psi'}$,$\mathbf{\Psi''}$,$\mathbf{\Psi'''}$ … possibles. Or, ce sens de $\mathcal{D}$ pré-existant à **Sy** doit « coller » avec la structure logique de **Sy**, puisqu'il s'agit d'interpréter **Sy** *via* $\mathbf{\Phi}$.
Que les pourfendeurs de « croyances métaphysiques » ne s'alarment pas prématurément. La seule pré-existence *logique* du « sens » de $\mathcal{D}$ à l'interprétation par $\mathcal{D}$ d'un système formel **Sy** n'a rien de « platonicien » en soi. On ne doit pas confondre « pré-existence *logique* » et « pré-existence *ontologique* » du sens. Si celui-ci est, logiquement parlant, condition *préalable* à ce qu'une bijection $\mathbf{\Psi'}$,$\mathbf{\Psi''}$,$\mathbf{\Psi'''}$, … recouvre le statut d'une bijection $\mathbf{\Phi}$, rien ne nous empêche d'envisager, sur le plan ontologique, un sens artificiellement fabriqué, sans aucune référence platonicienne. Mais nous rencontrerons par la suite des cas de figure où les choses ne se présenteront pas de manière aussi simple, que cela nous plaise ou non. Plus précisément, nous constaterons que le postulat de la pré-existence à la fois ontologique et logique par rapport à une interprétation $\mathcal{D}$ = I(**Sy**) donnée et le refus *a priori* d'une telle pré-existence partagent, en matière de « métaphysique » – ou de « non-métaphysique », selon le point de vue adopté – le *même statut*.

2.3 La formalisation d'un édifice mathématique en tant que cas particulier de l'interprétation au sens de la théorie des modèles

Notre investigation portant sur le modèle platonicien standard de la connaissance en tant que dispositif de conceptualisation jouant un rôle déterminant en matière de fondements mathématiques exige que nous spécifions la *formalisation* d'un édifice mathématique **E** donné en tant que cas particulier d'une interprétation **D** = I(**Sy**). Cette démarche passe à par une réflexion préalable sur la nature du « formalisme » attribué à Hilbert, réflexion que nous avions entamée dès les débuts de la séquence (2.nm) et qui pour le moment est loin d'aboutir.

2.31 Pour (commencer à) cerner la signification du concept « formalisme »

Reprenons donc le concept « formalisme ». Ce concept renvoie tantôt à la simple manipulation de signes selon des règles bien définies (Srnivasan, 2003, p.2; comp. Snappper 2006, pp. 212 ss.), tantôt, conformément à la connotation véhiculée par le suffixe *-isme*, à la *conviction*, ou si on préfère, la *croyance* que les mathématiques puissent être réduites à ce genre de manipulation (Srnivasan, 2003, p.3). Abstraction faite pour une troisième fois – et toujours à titre provisoire – de l'horizon gödélien de l'affaire, c'est l'hiatus du formel et du « sens » émergeant des expressions (2-1) (2-2) qui rend discutable cette conviction: *Admettons* avec Srinivasan (qui n'y souscrit pas forcément) qu'un édifice mathématique **E** ne soit que syntaxe et qu'une quelconque « vérité » mathématique ne peut relever que d'une interprétation selon la théorie des modèles associée à l'édifice **E** en question (Srnivasan, 2003, p.2). Mais, dans ces conditions (cf. 2.21), comment démarquer **E** de **Sy**? Autrement dit, comment distinguer **Φ** des **Ψ'**, **Ψ''** , **Ψ'''** … ? Au sein d'une concaténation **Sy** ← **Ψ** → **Sy'** ← **Ψ'** → **Sy''** ← **Ψ''** → **Sy'''** ← **Φ** → **D** ≡ **E** exprimant l'interprétation de **Sy** et de ses équivalents arbitraires **Sy'**, **Sy''** … par **E**, le « formalisme » conséquent avec lui-même relèguerait **Φ** parmi les **Ψ**, **Ψ'**, **Ψ''** ... et **E** parmi les **Sy**, **Sy'**, **Sy''** … . Cela colle peut-être – et encore ... – avec un « formalisme » consistant en la manipulation de signes arbitraires selon des règles définies. Il serait en revanche quelque peu fragile de vouloir faire de ce « formalisme » un outil dédié aux fondements de l'édifice mathématique. Quant à une théorie des modèles donnée censée conférer des « vérités » à **Sy** ou à ses équivalents formels **Sy'**, **Sy''** …, elle présuppose, qu'on le veuille ou non, la présence d'une **Φ** distincte d'une façon ou d'une autre des **Ψ**, **Ψ'**, **Ψ''** … Nous n'avons pas d'autre choix que d'élucider dans la mesure du possible cette nouvelle zone de flou.
Quoi qu'il en soit, l'élucidation du concept « formalisme » s'avère épineuse. Les séquences suivantes tenteront de cerner la signification de ce concept en vue d'avancer quant à la différentiation des **Φ** à l'égard des **Ψ**, **Ψ'**, **Ψ''**

2.32 L'« interprétabilité » de Sy par D

Nous avons évoqué plus haut la pré-existence sur le plan *logique* du sens de **D** par rapport à **Sy** en tant que condition préalable à une interprétation **D** = **I**(**Sy**). C'est maintenant le moment d'aborder de plus près la *question* si le sens conféré à un système formel **Sy** *via* son interprétation **I**(**Sy**) par le domaine **D** peut être donné « avant-coup » par rapport à l'acte interprétatif ou s'il apparaît nécessairement « après-coup ». Ce point nous fournira quelques pistes quant à l'élucidation de l'hiatus du formel et du sens. Mais il existe également une autre dimension du problème dont l'abord nous aidera à avancer du moins jusqu'à un certain degré: la présence ou absence de données empiriques au sein de **D**. Nous verrons qu'il peut être utile d'entamer notre parcours de ce côté là.

2.321 Domaines D et édifices mathématiques E

Jusqu'ici , nous avions admis plus ou moins tacitement qu'un édifice mathématique E représentait pour un système formel **Sy** un potentiel d'interprétation parmi d'autres domaines D. En effet, la notion de domaines D véhicule un champ de connotation expressément vaste; il s'agit maintenant de spécifier E par rapport à D. Par définition, un édifice mathématique ne comporte pas de données empiriques. En ce qui concerne le domaine D que la théorie des modèles caractérise par sa seule appartenance à un « univers » U n'étant pas autrement précisé, la présence de données empiriques dans D est envisageable, mais non pas nécessaire.

Notre investigation focalise sur les fondements des mathématiques, donc sur des édifices E. L'éventuelle présence de données empiriques au sein d'un domaine D censé interpréter un système formel **Sy** n'entre donc pas dans la *finalité* de notre cheminement. Mais comme d'un autre côté nous tentons de cerner la notion de « formalisme mathématique » en spécifiant l'interprétation E = I(**Sy**) par rapport au cas plus général D = I(**Sy**) pris comme *point de départ*, rien ne nous empêche d'aborder *au passage* des domaines D censés comporter des données empiriques. En effleurant cette catégorie de domaines D, nous rencontrerons quelques cas de figure où la doctrine vulgarisée du « formalisme » prise au pied de la lettre se traduirait par une vision plutôt paradoxale de certaines pratiques scientifiques aussi courantes que quotidiennes. Mieux vaut prendre acte des conséquences objectivement inconséquentes d'un « formalisme » dogmatique que de contourner ces problèmes en les taisant.

D'autre part, l'intérêt de Hilbert (Stoltzner, 2003 pp. 248 ss.) pour des domaines D comportant des données empiriques – intérêt répondant certes à une motivation différente de la nôtre – dénote que cette ouverture à des interrogations voisines peut être profitable à notre propre démarche.

En effet, lorsque Hilbert entame au début du 20ième siècle (voire à la fin du 19ème) son parcours de recherches dédiées aux fondements des mathématiques, il définit un *modus operandi* consistant en la réorganisation *via* axiomatisation d'un corpus de données « cohérentes » et qualifie cette démarche de « commune à 'toutes' les sciences » (Hilbert, 1902/2004, p. 541, Zach, 2005 p. 3). Certes, la référence à « 'toutes' les sciences » paraît de nos jours quelque peu catégorique. Il semble néanmoins raisonnable d'admettre qu'au sein de l'ensemble des corpus de connaissances potentielles englobant des données d'ordre empirique, il existe des corpus ayant vocation d'être l'interprétation D = I(**Sy**) d'un système formel **Sy** *via* $\mathbf{\Phi}$.

Dans un premier temps, distinguons donc les interprétation potentielles comportant des données empiriques et les interprétation potentielles purement rationnelles ou « abstraites », en notant les premières $\mathbf{I}_E$ et les secondes $\mathbf{I}_R$. De même, en ce qui concerne les domaines susceptibles de servir d'interprétation à un **Sy** donné, nous notons D_E les domaines comportant des données empiriques, et D_R les domaines purement rationnels. Enfin, les bijections $\mathbf{\Phi}$ reliant un **Sy** soit à un D_E, soit à un D_R , sont notées selon leur cas de figure $\mathbf{\Phi}_E$ ou $\mathbf{\Phi}_R$. Adoptons encore la convention que pour des signes I, D , $\mathbf{\Phi}$ dépourvus d'indices E , R, nous sous-entendons d'emblée I_R , D_R , $\mathbf{\Phi}_R$.

Considérons maintenant une théorie physique s'inscrivant dans un univers U de phénomènes accessibles à l'expérience. Admettons – en première approximation, suffisante ici – que cette théorie physique consiste en le domaine $\mathsf{D} \subset \mathsf{U}$ de phénomènes « mathématisables » au niveau de leurs interactions et que cette « mathématisation » opère en les termes d'un édifice mathématique E. D'autre part, négligeons provisoirement (cf. ci-dessous) l'épineuse question s'il existe des spécificités de E vis-à-vis d'un système formel **Sy**, autrement dit, réduisons *de facto* E à un **Sy**. Dans ces conditions – certes discutables (cf. ci-dessous) – D est une interprétation de E si et seulement si

$$\exists\, \mathbf{\Phi}_E, \qquad \mathsf{E} \leftarrow \mathbf{\Phi}_E \rightarrow \mathsf{D}_E \tag{2-3}$$

Le statut d'interprétation de E attribué à D_E en vertu de (2-3) semble satisfaire aux exigences du catéchisme logico-positiviste standard concevant tout édifice mathématique E comme un « système de tautologies ».
Ensuite – puisque rien, absolument rien ne nous en empêche, sinon l'horizon gödélien dont nous faisons pour l'instant abstraction – écrivons E en tant qu'interprétation d'un système formel **Sy**:

$$\exists\, \Phi_E, \qquad \mathbf{Sy} \leftarrow \Phi_R \rightarrow \mathsf{E} \tag{2-4}$$

Concaténons maintenant (2-3) et (2-4)

$$\mathbf{Sy} \leftarrow \Phi_R \rightarrow \mathsf{E} \leftarrow \Phi_E \rightarrow \mathsf{D}_E \tag{2-5}$$

L'opération en soi tient la route, mais E subit dans (2-5) une sorte de schizophrénie. Tout d'abord, remarquons qu'un vertu de la bijection $\mathbf{Sy} \leftarrow \Phi_R \rightarrow \mathsf{E}$, **Sy** se voit attribuer un *sens* global exprimé par E; sinon l'expression « interprétation » ne serait pas à sa place. Là encore, les exigences du catéchisme néo-positiviste semblent entièrement satisfaites. Or, selon ce même catéchisme, E dans (2-5) est à la fois un système de tautologies et un système doté de sens.
Mais la schizophrénie épistémologique ne s'arrête pas là. Lorsqu'un partisan du « platonisme mathématique » tient des proposition du genre « Bien avant que le premier arithméticien se soit rendu compte que 2 + 2 = 4, l'entité immatérielle exprimée par le signe '2' ou par d'autres signes existait déjà, ainsi que sa combinaison avec elle-même correspondant à '2 + 2 = 4' », on lui rétorque aussitôt que de tels propos relèvent « de toute évidence » des « croyances métaphysiques ». (Fano & Graziani, 2011, pp. 21 ste.). Admettons-le, mais reformulons ces propos « quelque peu caricaturaux » (*ibid.*) d'une manière légèrement différente: « A l'époque des dinosaures et même avant l'apparition de la vie sur terre, bref, 1° bien avant qu'Euclide ne se soit attelé à une première axiomatisation de la géométrie, 2° bien avant que Hilbert ne se soit efforcé de consolider cette axiomatisation sur de nouvelles bases épistémologiques, 3° bien avant que divers formalistes, après avoir enrôlé Hilbert dans leurs rangs sans trop lui demander son avis, n'aient relégué la géométrie à l'instar de toutes mathématiques parmi les systèmes tautologiques construits sur des présupposés arbitraires, 4° bien avant que les adeptes d'autres sensibilités philosophiques – intuitionnisme, constructivisme, pragmatisme etc. etc. – n'y aient ajouté leur propre vision des choses, bref, bien avant tout cela, un triangle formé par les centres de gravité de trois cailloux traînant par là, possédait déjà une somme angulaire égale à deux angles droits. ». Assumons l'aspect à son tour « métaphysique » de ce qui précède. Remarquons néanmoins que l'exemple des trois cailloux formant un triangle 1° reproduit par rapport à l'expression $\mathbf{Sy} \leftarrow \Phi_R \rightarrow \mathsf{E} \leftarrow \Phi_E \rightarrow \mathsf{D}_E$ l'écartèlement de E entre deux conceptions épistémologiques incompatibles, et 2° dénote un second clivage qui sépare deux états d'esprit scientifiques concernés par les « mêmes » mathématiques mais qui n'abordent pas ces « mêmes » mathématiques dans un « même » état d'esprit.
D'une part, en évoquant les centres de gravité des trois cailloux en tant que points idéaux formant un triangle – lui aussi idéal – doté d'une somme angulaire égale à deux angles droits, nous nous référons à un théorème de la géométrie euclidienne démontrable *si et seulement si* nous faisons le choix – parmi d'autres choix possibles – d'admettre la validité du Cinquième Postulat d'Euclide. De *ce* point de vue, le théorème de la somme angulaire apparaît comme une émanation de la seule raison pure détenant de son côté le monopole d'accès à ce théorème. Toujours de ce point de vue, il semble légitime de considérer – sans aucune connotation caricaturale dans un sens ou dans l'autre – comme croyance métaphysique l'idée que la validité des théorèmes d'un édifice mathématique E précède l'apparition de la raison humaine.
Oui, mais l'exemple des trois cailloux formant *de facto* un triangle nous renvoie également à des éléments de la réalité physique s'exprimant par des phénomènes mathématisables. Bien que la

géométrie élémentaire nous dispense précisément d'«expérimentation » sur la somme angulaire du triangle, les sciences physiques recourent dans d'autres cas de figure à des édifices mathématiques **E** pour mathématiser des phénomènes qu'elle considère – du moins à l'échelle macroscopique, pour ne pas compliquer les choses – comme « réels ». Or, cette fois-ci, l'aperception philosophique de l'édifice mathématique **E** change de fond en comble. La physique repose sur le *présupposé épistémologique* que ses lois sont non plus « éternelles » mais, à partir du voisinage immédiat du big-bang, atemporelles. Loin de se réduire à une nouvelle « croyance métaphysique », le présupposé de l'atemporalité de lois physiques, n'a été jusqu'à nouvel ordre réfuté par aucune observation. Il est inutile en soi de rappeler que l'observation astrophysique, au fur et et à mesure que ses objets s'éloignent dans l'espace, nous fournit du coup des informations remontant de plus en plus dans le temps. A l'état actuel de la connaissance, aucune observation couvrant les confins de l'univers et du coup son passé ultime ne remet en cause l'aspect atemporel des lois de la physique. Des hypothèses avançant explicitement le variation, au fil du temps, des constantes de la nature n'ont jusqu'alors pas reçu la moindre confirmation empirique. Or, si la confiance en l'aspect atemporel des lois de la physique semble justifiée, que dire du langage mathématique dans lequel ces lois s'expriment? Tandis qu'un langage arbitraire donné peut bien entendu faire l'objet de substitutions régies par des bijections $\boldsymbol{\Psi}$, les **E** $\leftarrow$ $\boldsymbol{\Phi}_E$ $\rightarrow$ $\mathbf{D}_E$, en raison même de leur statut de bijection, ne sont-elles pas censées transposer vers l'édifice mathématique **E** l'atemporalité des lois physiques exprimés par $\mathbf{D}_E$? Un physicien aurait-il l'idée d'affirmer sérieusement que l'expression mathématique de la théorie de la relativité générale n'a pu être valide avant que l'humain n'ait « inventé (?) » le calcul tensoriel? Que l'univers n'ait pas pu être régi il y 12 milliards d'années par la relativité générale sous prétexte que la validité « déjà à cette époque » de l'appareil mathématique **E** allant avec cette théorie relevât des « croyances métaphysiques »?

Bref, dans l'expression **Sy** $\leftarrow$ $\boldsymbol{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **E** $\leftarrow$ $\boldsymbol{\Phi}_E$ $\rightarrow$ $\mathbf{D}_E$, l'édifice mathématique **E** entre en collision avec lui-même. Le *main stream thinking* des dernières décennies manifestement attaché à des « mathématiques reposant sur des présupposés arbitraires » prétend bien entendu avoir la solution pour éviter le clash. Le « *constructivisme* » ne nous enseigne-t-il pas que les mathématiques « construites » par l'humain se retrouvent non pas dans la réalité « tout court », mais « seulement » dans la réalité « reconstruite » par le même humain afin de coller avec ces mathématiques? (Comp. Dubinski, 2000, pp. 1ss.) Or, une telle conception serait-elle à l'abri de toute discussion? Quiconque pourrait-il « prouver » que les prévisions si exactes de la mécanique céleste concernant par exemple la position de la lune à tel ou tel moment – prévisions dont les navigatrices et navigateurs parmi nous apprécient l'exactitude *via* l'annuaire des marées qui en dépend – résulte exclusivement de la « reconstruction » par nos soins de la trajectoire de la lune? Pourquoi alors ne pas construire une autre réalité, sans marées, ce qui faciliterait la tâche aux navigatrices et navigateurs débutant(e)s, notamment dans les eaux tumultueuses de la Manche animée de marées prononcés et de courants conséquents? Et qui parmi les humains aurait pu construire l'univers des galaxies et amas de galaxies en anticipant si bien sur l'avènement de l'appareil mathématique de la relativité générale auquel l'univers ainsi construit semble répondre dans des proportions plus que satisfaisantes? « *Le constructif*, dit Salanski, *est en fait toujours déjà présupposé, non seulement par la connaissance mathématique, mais par toute connaissance* (...) » (Salanskis, 1955, p. 194; comp. Dumoncel, sans date, p. 3)

Maintenant, il est inutile de répéter qu'un édifice mathématique **E** *vu* par un(e) mathématicien(ne) n'est pas le « même » que l'édifice **E** « *utilisé* » par un(e) physicien(ne). Cela, nous le savons toutes et tous. Mais il conviendrait de prendre conscience et d'*assumer* qu'il s'agit là d'un *problème* qui est objectivement présent et qui ne disparaît pas suite à un décret promulgué au nom de tel ou tel catéchisme épistémologique.

Face à ces incertitudes, la physique ne peut que formuler l'*hypothèse de travail* d'un appareil mathématique précédant à la fois sa propre formalisation (cf. *infra*) et les découvertes empiriques que cet appareil formalisera à son tour. Il s'agit là d'une hypothèse de travail au sens le plus strict du terme: Une hypothèse restant une hypothèse, mais sans laquelle la physique aurait du mal à travailler. Une hypothèse de travail est une hypothèse et rien d'autre. Assumée en tant que telle, une hypothèse de travail ne pourrait guère être reléguée reléguée aux « croyances métaphysiques ». En revanche – nous le constaterons sous peu – la négation *a priori* de cette hypothèse relève autant de ces « croyances métaphysiques » décriées que l'affirmation positive de l'existence en soi d'un ciel d'idées platonicien.

2.322 Interprétation à droite, interprétation à gauche, formalisation

Suite à l'hypothèse de travail que nous venons d'évoquer – essentiellement pour des raisons heuristiques – à propos de la physique, envisageons maintenant, en matière d'interprétation D = I(**Sy**), les deux cas de figure suivants: 1° Le système formel **Sy** précède son interprétation par D. 2° Le domaine D précède **Sy** censé l'interpréter. Le cas de figure 1° *semble* mieux s'accorder à la signification du terme « interprétation » tel qu'il est véhiculé par le langage courant: La partition musicale doit déjà être là avant que le musicien ne l'interprète. Mais dans le cadre de notre investigation, c'est moins simple. Ladite partition a bel et bien un *sens* que le musicien restitue selon sa propre sensibilité. Cette situation n'a pas grand-chose en commun avec l'interprétation par D d'un système formel **Sy** qui *par définition* ne possède *aucun sens*. Nous devons en revanche nous interroger si ce n'est pas plutôt le cas de figure 2° que nous retrouvons dans la pratique scientifique et plus spécialement mathématique telle qu'elle se rencontre sur le terrain: Il n'est certainement pas « évident » qu'un système D possédant d'une manière ou d'une autre un sens aperçu en tant que tel se retrouve après-coup relié par une bijection $\mathbf{\Phi}$ à un système **Sy** reposant sur des présupposés *arbitraires*, sachant que $\mathbf{\Phi}$ comporte quatre composantes Φ_A , Φ_M , Φ_D , Φ_{Ax} . Mais ce point est controversé et, probablement, le restera. Sans vouloir trancher, nous *envisageons* simplement les deux *possibilités* logiques 1° « Le système formel **Sy** précède son interprétation par D » 2° « Le domaine D précède le système formel **Sy** qu'il interprète ». De manière plus ou moins arbitraire (mais non pas tout à fait arbitraire; nous tenons compte du positionnement typographique de D par rapport à **Sy**) nous appelons le cas de figure 1° « interprétation à droite » et le cas de figure 2° « interprétation à gauche ». Sur le plan symbolique, nous matérialisations l'expression « interprétation à droite » par

$$\mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Phi}_K \rightarrow \mathsf{D}_K , K = E , R \qquad (2\text{-}6)$$

et l'expression « interprétation à gauche » par

$$\mathsf{D}_K \leftarrow \mathbf{\Phi}_K \rightarrow \mathbf{Sy} , K = E , R \qquad (2\text{-}6)$$

Nous réservons la dénomination « *formalisation* » au *cas de figure* « interprétation à gauche ». En effet, à partir du moment où nous admettons que « formalisation » sous-entend « formalisation de 'quelque-chose' », nous aurions du mal à concéder qu'on puisse formaliser « quelque-chose » sans que ce « quelque-chose » soit déjà là. Notons que *ces propos n'ont toujours rien de platonicien*: Si l'entité à formaliser doit déjà être là au moment où la formalisation est entamée, rien ne s'oppose à ce que ladite entité soit, intellectuellement parlant, fabriquée de toutes pièces.
Selon le même schéma de pensée, nous appelons « système formalisé par **Sy** » le domaine D qui représente une interprétation à gauche du système formel **Sy**.

2.3221 De nouvelles zones de flou liées aux notions d'interprétation à droite et d'interprétation à gauche

Les deux cas de figure « interprétation à droite » et « interprétation à gauche/formalisation » sont

envisageables. Mais chacun de ces deux cas de figure a toutes les chances d'entraîner des controverses. Afin de nous faire une idée de l'ampleur de ces controverses potentielles, considérons, en nous référant à l'alphabet de signes arbitrairement choisis $\mathbf{A}_{Sy} = \{*, \sigma, \oplus, \otimes, \ni, \#, \nabla, <, >\}$, les assemblages $*\oplus\sigma\#<\nabla*\#<\oplus\sigma\#<$, $*\oplus\sigma\#>\nabla*\#>\otimes\#>\sigma\#>$, $*\otimes\sigma\#<\nabla*\#<\otimes\sigma\#<$, $*\otimes\sigma\#>\nabla*\#>\oplus\sigma\#>$, $*\otimes\sigma\#<\nabla*\otimes\ni\sigma\# >$. Admettons que ces assemblages soient des théorèmes d'un système formel **Sy** doté de ses ensembles **A**, **Rm**, **Rd** et **Ax**.
Tournons-nous maintenant vers l'alphabet $\mathbf{A}_{Li}$ de la « logique intuitive **Li** , $\mathbf{A}_{Li} = \{ p, q, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, V, F\}$ tout en négligeant que dans le cadre d'une formalisation plus poussé, les neuf éléments de $\mathbf{A}_{Li}$ peuvent être substantiellement réduits. En définissant enfin une bijection $\Phi_A : \mathbf{A}_{Sy} \leftrightarrow \mathbf{A}_{Li}$ telle que $\Phi_A : (* \leftrightarrow p, \sigma \leftrightarrow q, \oplus \leftrightarrow \vee, \otimes \leftrightarrow \wedge, \ni \leftrightarrow \neg, \# \leftrightarrow \Rightarrow, \nabla \leftrightarrow \Leftrightarrow, < \leftrightarrow V, > \leftrightarrow F)$, nous reconnaissons aussitôt la transcription (et rien d'autre pour le moment, cf. *infra*) de ces théorèmes de **Sy** figurant ci-dessus par des théorèmes bien familiers de la « logique intuitive » **Li**, en l'occurrence $p\vee q \Rightarrow V \Leftrightarrow p \Rightarrow V\vee q \Rightarrow V$, $p\vee q\Rightarrow F \Leftrightarrow p\Rightarrow F\wedge q \Rightarrow F$, $p\wedge q\Rightarrow V \Leftrightarrow p\Rightarrow V\wedge q\Rightarrow V$, $p\wedge q\Rightarrow F \Leftrightarrow p\Rightarrow V\vee q\Rightarrow V$, $p\wedge q\Rightarrow V \Leftrightarrow p\wedge\neg q\Rightarrow F$. A condition que la bijection $\Phi_A : \mathbf{A}_{Sy} \leftrightarrow \mathbf{A}_{Li}$ soit la composante d'une bijection $\mathbf{\Phi} \equiv \{\Phi_A, \Phi_M, \Phi_D, \Phi_{ax}\}$ liant **Sy** à **Li**, la transcription figurant ci-dessus inscrit **Li** dans une *interprétation* de **Sy** par **Li**.
Posons-nous maintenant la question suivante: S'agit-il *d'une interprétation à droite* $\mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow \mathbf{Li}$ *ou d'une interprétation à gauche* $\mathbf{Li} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow \mathbf{Sy}$?
Comment répondre? Historiquement parlant, la « logique intuitive » – en la forme dont nous venons de reproduire à titre d 'échantillons quelques théorèmes parmi les plus courants – apparaît, dans des contextes divergents et sous diverses déclinaisons équivalentes, tout au long de la seconde moitié du 19ème siècle, grâce au travail pionnier de George Boole, C.S. Peirce, Ernst Schröder … La logique intuitive « *effectivement rédigée sur papier* » – nous n'avons toujours pas l'intention de démontrer l'existence objective du ciel d'idées platonicien – était là *avant* sa formalisation progressive qui, ultérieurement, a abouti à la réduction – elle aussi progressive – de son alphabet et de ses axiomes. Sous cet angle historique, ou simplement chronologique, nous avons affaire à une interprétation à droite où le domaine $\mathbf{D}_K$, dans notre cas **Li** , « précède » le système formel **Sy** qu'il interprètera. Oui, certes, mais attention. Dans le cadre de notre champ d'investigation, le sens chronologique du verbe « précéder » s'efface, doit s'effacer devant son sens logique. Selon la thèse courante, la « logique » serait le terrain de prédilection des systèmes formels. L'appartenance de la logique intuitive à la catégorie des systèmes formels ne semble pourtant pas être d'emblée assurée. Nous pouvons bien entendu transformer la logique intuitive **Li** en système formel **Sy** relevant de la configuration de signes dépourvus de sens et assemblés selon des règles arbitraires. Or, ce **Sy** désémantifié, par définition n'est plus cette logique intuitive dont il est issu. D'autre part, vouloir reléguer la pré-existence épistémologique aux subtilités négligeables serait quelque peu péremptoire. Une performance de singe dactylographe borélien ferait figure de jeu d'enfant en comparaison à la fabrication d'un système **Sy** de signes dépourvus de sens régi par un quadruplet (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**) « *arbitraire* » qui se superposerait en quelque sorte « par hasard » à la structure logique de **Li** avec son infinité de propositions dotés d'un sens « intuitivement vrai » ou « intuitivement faux »; propositions du genre « il est faux qu'une porte fermée soit ouverte », « il est vrai que pour pouvoir entrer sans effraction dans une maison possédant deux portes, l'une *ou* l'autre des deux portes doit être ouverte », « je ne peux pas être entré(e) sans effraction dans une maison possédant deux portes dont l'une et l'autre était fermée » et ainsi de suite, sans oublier l'ensemble des circuits électriques aux branchements tantôt en série, tantôt en parallèle sur lesquels nous reviendrons. Notons que de grands pionniers de la logique contemporaine tels que Schröder n'expriment pas forcément l'intention de créer des systèmes formels où l'assemblage de signes selon des règles arbitraires etc. représenterait une finalité en soi. Schröder construit ses formalismes dans le but explicite de généraliser les lois de la pensée dans la mesure où celle-ci a pour finalité la

connaissance (Schröder, 1890, p.1; comp. p. 121). Écrivant des formules à vocation universelle, Schröder envisage également leur interprétation dans un cadre particulier donné; il justifie même des formules par leur interprétation potentielle (Schröder, 1890, p.521 ss.). Animé de préoccupations d'ordre formel concernant entre autres l'allègement de l'alphabet (Schröder, 1890, p.601), l'auteur, suite à Boole et à Peirce, assimile la disjonction et la conjonction respectivement à une « somme » et à un « produit » de valeurs 0, 1, puisque dans l'algèbre *pré-existant* à ce choix, on trouve une convention de primauté *formelle* de la multiplication sur l'addition permettant une économie de parenthèses. (Schröder, 1890, pp. 603,607, 624 ss.) Remarquons encore que Schröder attribue à 0 et 1 respectivement les valeurs « rien » et « existant » en leur *sens* « intuitif »(Schröder, 1890, pp. 212 ss.). Bref, ce *précurseur* – ce terme prend dans notre contexte une signification particulière (cf. *infra*) – n'a pas l'intention de créer des assemblages de signes selon des règles arbitraires. Maintenant, nous devons bien entendu nous interroger si les « intentions » d'un auteur donné peuvent représenter un quelconque intérêt. Tant que adoptons le point de vue « *découverte* scientifique », la réponse serait évidemment non. « Découverte » sous-entend « découverte de quelque-chose existant préalablement », et les « intentions » du découvreur n'y sont pour rien. Il arrive même qu'un découvreur fasse des découvertes contraires à ses « intentions ». En revanche, s'il nous adoptons le point de vue de « formalisme caricatural » au sens de « manipulation de signes arbitraires » (comp. Zach, 2005, p. 31), pourrions-nous alors avancer la *moindre* alternative aux simples « intentions » du manipulateur? Mais que dire dans le cas où l'auteur en question n'exprimerait aucune intention de ce genre? Schröder en tant que « pionnier » de la logique contemporaine, tout en se référant à des inférences mathématiques et d'autres configurations de pensée dotées d'un sens, « préparerait-il le chemin » à de futurs systèmes formels, donc arbitraires, mais en quelque sorte « pré-existeraient potentiellement à eux-mêmes »? Cela nous mène à la notion – plus qu'ambiguë dans notre contexte – de « précurseur ». Que Schröder et d'autres penseurs soient des précurseurs de quelque-chose qui sera « crée » ultérieurement, cela ne poserait pas de problème en soi. En revanche, l'idée qu'un système d'inférences doté de sens soit *intrinsèquement* le « précurseur » de systèmes dépourvu de sens tout en jouant un rôle déterminant quant aux *fondements des mathématiques*, mène droit à la collision entre le sens et sa négation revendiquée. (Notons par ailleurs que Schröder oppose à « l'ancienne logique » considérée comme parachevée la nouvelle logique promettant à l'instar de toute autre science des avancées scientifiques (Schröder, 1890, pp. 121 ss.) sans préciser si ces avancées consistent en des découvertes de ce qui « existe » déjà où en des « fabrications », mais il semble improbable que l'auteur défende la seconde option.
Dans ces conditions, il devient très difficile à trancher si l'interprétation de la logique formelle – rangée dans la catégorie des **Sy** – par la logique intuitive **Li** est une interprétation à gauche $\mathbf{Li} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow \mathbf{Sy}$ ou une interprétation à droite $\mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow \mathbf{Li}$.
Reprenons maintenant notre système formel **Sy** muni de l'alphabet expressément arbitraire $\mathbf{A}_{\mathrm{Sy}} = \{*, \sigma, \oplus , \otimes , \ni , \# , \nabla , < , > \}$, système **Sy** que nous supposons être interprété par la « logique intuitive » **Li**. Il est bien connu que cette « logique intuitive » se matérialise par divers types de montages de circuits électriques. A titre exemple, « $1 \vee 0 \Rightarrow 1$ ». dénote un montage en parallèle et « $1 \wedge 0 \Rightarrow 0$ » un montage en série. Nous pouvons donc établir une concaténation des deux bijections $\mathbf{\Phi}_R$ et $\mathbf{\Phi}_E$, reliant d'abord **Sy** à **Li**, puis **Li** à la formalisation des montages de circuits électriques $\mathbf{D}_E$, ce qui donne

$$\mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow \mathbf{Li} \leftarrow \mathbf{\Phi}_E \rightarrow \mathbf{D}_E \tag{2-7}$$

Court-circuitons maintenant (2-7) pour obtenir

$$\mathbf{Sy} \leftarrow \mathbf{\Phi}_E \rightarrow \mathbf{D}_E \tag{2-8}$$

et posons-nous, en ce qui concerne les *deux cas de figure* (2-7)(2-8) la question s'il s'agit d'une

interprétation à droite **Sy** $\leftarrow$ Φ_E $\rightarrow$ D_E ou d'une interprétation à gauche $D_E \leftarrow$ Φ_E $\rightarrow$ **Sy**.
Pour le *seul* cas de figure (2-8), l'affaire semble relativement entendue. Puisque **Sy** et D_E sont *ici* l'un et l'autre des créations artificielles, nous pouvons opter arbitrairement pour les deux formulations « **Sy** précède D_E » ou «D_E précède **Sy** ». Ces propos ne font pas forcément l'unanimité, mais, *dirait-on*, se défendent. Dans (2-7), en revanche, la présence de **Li** complique la situation. La « logique intuitive » **Li** qui se retrouve dans la théorie des circuits électriques D_E – rappelons pour la clarté que D_E interprète **Li** par exemple en des termes de « $1 \vee 0 \Rightarrow 1 \rightarrow$ montage en parallèle » ou « $1 \wedge 0 \Rightarrow 0 \rightarrow$ montage en série » – cette « logique intuitive » **Li** donc régissait déjà, bien avant la mise en place de circuits électriques par l'être humain, des propos du genre « pour entrer sans effraction dans une maison dotée de deux portes, l'une *ou* l'autre doit être ouverte » ou alors « si les les deux portes de la maison se succèdent dans un sas sans autre issue, la fermeture d'une seule de ces portes m'empêche d'entrer dans la maison sans effraction ». Quittes à nous répéter, re-précisons que la « temporalité » de ces propos n'a aucune importance puisque la logique **Li** précède logiquement à la fois la théorie des circuits électriques D_E et la « 'théorie' de la configuration des portes d'une maison ». D'interminables discussions risquent maintenant de se produire quant à la question si la logique intuitive **Li** « existait » déjà avant d'être rédigée par les grands pionniers du 19ème siècle. Cette incertitude autour de **Li** se répercute dans (2-7) *via* Φ_R sur **Sy**. Dans (2-7), il est très difficile de dire si nous avons une interprétation à gauche ou une interprétation à droite, et sous cet angle les choses s 'avèrent également dans l'expression (2-8) moins simples qu'elle ne le paraissent au départ.

2.4 Retour sur les croyances métaphysiques

2.41 Négations métaphysiques de la métaphysique

La question si l'interprétation suit nécessairement le système interprété, ou si on peut également envisager le cas de figure inverse – l'interprétation précédant ce qu'elle interprète – ne se prête guère à une réponse tranchée. Bien que le bon sens – mais celui-ci ne représente pas toujours le meilleur repère en matière d'inférences scientifiques – s'oppose à l'idée d'une interprétation précédant l'interprété, la séquence 2.31 suggère dans ce domaine la plus grande circonspection. Si la légitimité de la méfiance à l'égard des « croyances métaphysiques » va de soi, il semble en revanche que lesdites croyances débordent largement sur les délimitations relevant du dogme néo-positiviste. Plus précisément, de nombreuses argumentations anti-métaphysiques recourent à des présupposés métaphysique qui ne veulent pas dire leur nom. Certes, la fameuse proposition (cf. *supra*) « A l'époque des dinosaures où aucun mathématicien n'était là pour axiomatiser les divers édifices mathématiques, le théorème 2+2 = 4 était déjà vrai » relève effectivement de la croyance métaphysique. Mais, c'est autant le cas pour la négation de cette proposition, négation formulée « A l'époque des dinosaures où aucun mathématicien n'était là pour axiomatiser les divers édifices mathématiques, le théorème 2+2 = 4 n'était pas encore vrai ». En raison même de son côté métaphysique, l'assertion dinosaurienne n'est ni démontrable, ni réfutable. Et pourtant, la seule attitude non-métaphysique possible face à l'assertion dinosaurienne, en l'occurrence « On ne peut pas prendre position quant à la question si à l'époque des dinosaures tel ou tel théorème appartenant à tel ou tel édifice mathématique était déjà vrai ou non » devient à son tour des problématique. Un(e) néo-positiviste réellement convaincu(e) de sa doctrine qui défendrait l'attitude du genre « on ne peut pas prendre position ... » entrerait tôt ou tard en collision avec un dogme cher à son courant, à savoir l'«aspect épiphénoménal de la conscience humaine » prônant l'« indépendance des lois de la nature à l'égard de la pensée». Nous avions abordé plus haut les informations nous provenant de contrées éloignées de l'univers, informations remontant à un passé bien antérieur aux dinosaures, tout en confirmant des lois exprimées dans un langage mathématique *déjà cohérent* avant son axiomatisation. A cette occasion, nous nous étions interrogé(e)s si l'idéologie

constructiviste allait vraiment suffire à elle seule pour arranger les choses.
Ce qui précède rejoint – de manière bien complémentaire – la conclusion principale s'imposant suite à la séquence 2.3221 : Non seulement des « interprétations à gauche » – où l'interprétation précède l'interprété – sont envisageables au même titre que les « interprétations à droite » plus faciles à accepter pour le « bon sens », mais encore rien ne nous empêche *a priori* de concevoir des systèmes *immatériels* faisant figure d'interprétation d'un système formel *stricto sensu* tout en pré-existant à ce dernier. La *possibilité* de la pré-existence de systèmes immatériels à leur interprétation – matérielle ou immatérielle – *fait penser* au modèle platonicien standard de la connaissance tel que nous l'avions caractérisé au début de ce travail, et plus spécialement à l'émanation du modèle platonicien standard qualifiée de « platonisme mathématique » (Linnebo, 2006, p. 545).
Bien entendu, si la *possibilité* de la pré-existence de systèmes immatériels à leur interprétation *fait penser* au modèle platonicien standard de la connaissance, il ne s'agit toujours pas et ne s'agira jamais dans le cadre de ce papier de prouver l'existence objective d'un ciel d'idées platoniciennes comprenant l'ensemble des édifices mathématiques. Mais ce que nous venons d'affirmer quant à l'assertion dinosaurienne et sa négation, nous pouvons le reprendre en ce qui concerne le platonisme standard: Nier *a priori* l'existence objective d'idées mathématiques au sens platonicien standard du terme « idée » s'avère aussi métaphysique qu'affirmer l'existence objective de telles idées.
Certes, l'existence objective d'entités immatérielles néanmoins inaccessibles à la perception physiologique risque de soulever de nouveaux problèmes (Linnebo, 2006, p.545). Nous reviendrons là-dessus dans la séquence 2.42 et constaterons à l'occasion que là encore, énormement de métaphysique est parfois mise en œuvre pour éradiquer la métaphysique.
Mais dès maintenant, nous réalisons quel gouffre sépare, au sein d'une interprétation, le système qui interprète et le système qui est interprété. La formalisation étant un cas particulier de l'interprétation, ce gouffre affecte aussi et surtout la formalisation. Dans ces conditions, il n'est pas étonnant que la « nature » et l'« existence » des entités mathématiques et de leurs relations soient l'objet de controverses sans fin. Ainsi le modèle platonicien standard de la connaissance, *dans un premier temps*, fait déjà figure d'indispensable outil de conceptualisation assurant à ces controverses un minimum de *langage commun*.

2.42 Entités matérielles et immatérielles face au problème de Parménide

Aux yeux du bon sens, toujours lui, la pré-existence d'une entité *matérielle* à la connaissance effective que la raison humaine peut (éventuellement) en acquérir, ne pose pas de problème particulier. En revanche, la pré-existence d'éléments *immatériels* à leur connaissance effective serait – toujours d'après le bon sens – difficile à concevoir: La connaissance d'un objet matériel, poursuit le bon sens, commence par la perception de l'objet en question qui *est déjà là*. Mais d'où pourrait nous provenir une entité immatérielle avant que nous y pensions? (comp. Mazur, 2008, p.8; Linnebo, 2006, p. 1).
Au delà du bon sens et de ses limites attestées du moins depuis l'effondrement des certitudes héliocentriques, le dossier s'avère bien entendu moins simple. Tout d'abord, il suffit que nous nous rappelions la fragilité du type de réalisme qualifié à juste titre de naïf (comp. Mlika 2007, p. 40). D'autre part, l'adoption du réalisme naïf représente *nonobstant* son côté simpliste une option métaphysique parmi d'autres: La thèse selon laquelle les éléments de la réalité sensible existeraient indépendamment de la conscience (perception, pensée ...) humaine n'est ni démontrable, ni réfutable. Enfin, toute démarche épistémologique qui se propose simplement de *tenir compte* des limites du réalisme naïf doit en dernier lieu recourir à des hypothèses métaphysiques, que cela nous plaise ou non. Considérons les deux propositions suivantes, minimalistes sur le plan épistémologique: 1° « D'une façon ou d'une autre, les entités matérielles 'sont' » et 2° « D'une façon ou d'une autre, les objets mathématiques 'sont' ». Or, à partir du moment ou nous évoquons l'*être* de quoi que ce soit, nous touchons à *la* question ontologique remontant aux présocratiques, notamment à Parménide: Pourquoi l'être est-il, au lieu de ne pas être? Peut-on répondre à l'ultime

question ontologique sans faire de la métaphysique?
Certes, il est légitime que l'état d'esprit scientifique, précisément dans le but déclaré de ne pas « faire de la métaphysique », se *désintéresse* de la question de l'*être* des « objets » visés. Mais nous verrons que ce choix pose des problèmes à la recherche dédiée aux fondements mathématiques; des problèmes spécifiques dont d'autres activités scientifiques peuvent en effet faire abstraction. Nous reviendrons là-dessus. En attendant, permettons-nous les remarques suivantes: Le refus du réalisme naïf, refus qui aux yeux du néo-positivisme d'antan avait fait figure de métaphysique pure, semble de nos jours avoir gagné ses lettres de noblesse en matière de scientificité, et ce grâce aux sciences cognitives qui se sont penchées sur le dossier. La physicienne et épistémologue Mioara Mugur-Schächter par exemple montre à quel point les données réputées « objectives » dans le cadre de la physique – macroscopique autant que quantique – sont tributaires à la fois de diverses structures cognitives et de *présupposés* d'ordre cognitif bien déterminés (Mugur Schächter, 2006, pp. 33 ss., 60 ss. et *passim*, 2009, pp. 108 ss. et *passim*). Ces mêmes sciences cognitives s'efforcent également d'élucider la nature des édifices mathématiques à partir des structures de la cognition. Tandis que selon Gödel la connaissance des entités mathématiques – selon l'auteur objectives, existant indépendamment de la pensée humaine – s'acquiert selon des modalités *analogues*, mais *non pas identiques* aux schémas épistémologiques concernant la réalité sensible (Gödel 1990/1964 pp. 267 ste.; comp. Solomon, 2004, pp. 2, 4 ss.,), David Ruelle affirme de son côté que des données cognitives opérantes remettent sérieusement en cause la crédibilité du platonisme mathématique tel que Gödel le défend (Ruelle, 1999, pp. 3 ss.). Nous reviendrons là-dessus. En attendant, notons que Benacerraf exprime une conception encore différente: « *The minimal requirement, then, is that a satisfactory account of mathematical truth must be consistent with the possibility that some such truths be knowable. To put it more strongly, the concept of mathematical truth, as explicated, must fit into an over-all account of knowledge in a way that makes it intelligible how we have the mathematical knowledge that we have. An acceptable semantics for mathematics must fit an acceptable epistemology* .» (Benacerraf, 1973, p.667) Parmi les approches qui prétendent satisfaire à ces exigences, Benacerraf qualifie le platonisme mathématique en les termes suivants: « (...), *this account assimilates the logical form of mathematical propositions to that of apparently similar* empirical ones: *empirical and mathematical propositions alike contain predicates, singular terms, quantifiers, etc*. » (Benacerraf, 1973, p.668; c'est nous qui soulignons.). L'assimilation, par Bencerraf – bien entendu très discutable (comp. Linnebo, 2006, pp. 544, 546 ss..) – de l'existence objective des entités mathématique prônée par le platonisme du même nom à une réalité empiriquement décelable représente d'après l'auteur la principale faiblesse de l'approche platonicienne. Tandis que l'acquisition de connaissances d'ordre empirique relèverait d'une relation de cause à effet maîtrisée sur le plan épistémologie, la conception platonicienne de l'existence objective d'entités immatérielle échapperait à une telle maîtrise (Benacerraf, 1973, p.669, pp.670 ss.). Il n'est pas à propos ici de retracer l'ensemble des controverses que ces propos provoquent inéluctablement. Notons simplement que la position de Benacerraf, bien qu'il ne souscrive pas du tout à l'anti-platonisme primaire – l'auteur trouve utile d'énumérer les avantages du platonisme mathématique avant d'aborder ses défauts (Benacerraf, 1973, p.668) – heurte celle de Gödel selon lequel la connaissance mathématique s'acquiert selon des modalités analogues, mais non pas identiques aux schémas épistémologiques concernant de réalité sensible (cf. *supra*). Maintenant, nous n'allons certainement pas nous appuyer sur la place éminente occupée par Gödel dans l'histoire des mathématiques afin de placer le platonisme gödélien au-dessus de la vision de Benacerraf. Bien au contraire, nous partons du principe qu'on ne peut pas trancher entre ces deux positions. Quiconque qui s'aviserait de trancher risquerait de faire noyer sa voix par la cacophonie d'une infinité d'autres voix tranchant – chacune à sa manière – dans quelque sens divergeant. En effet, toute approche liant *d'une façon ou d'une autre* l'être des entités mathématiques à des considérations cognitives affronte une difficulté probablement insurmontable: Incapable de « sortir d'elle-même », la cognition humaine peut pas comparer l'*être* tel qu'elle le *traite* à l'être tel qu'il « *est* ». Les sciences cognitives doivent ainsi formuler des hypothèses de départ ni prouvables, ni réfutables quant aux liens entre l'*être* tel qu'il est et *l'être* tel qu'il est traité

par la cognition; hypothèses concernant au départ notamment l'existence même de la cognition en tant que telle. Bref, les sciences cognitives, pour élucider la cognition, sont bien obligées de se baser sur des hypothèses *métaphysiques* concernant l'*être* matériel autant que l'*être* immatériel. Sous cet angle, la formulation de l'hypothèse de l'existence d'entités immatérielles, par exemple des « objets » mathématiques – ou refuser une telle hypothèse, peu importe – n'est ni plus, ni moins « métaphysique » que la formulation de l'hypothèse de l'existence des objets matériels qui nous entourent.
Une activité scientifique ne voulant pas plonger dans la métaphysique n'a donc pas d'autre choix que de faire abstraction de l'être des objets visés. Se pliant à cette contrainte, la science « classique » (cf. *infra*) s'émancipe progressivement de la philosophie dans la mesure où celle-ci reste concernée de l'être. Tandis que la « philosophie de métier » s'intéresse par exemple à la question si les objets de notre environnement se présentent tels qu'ils « sont » ou tels que les facultéspar exemple données *a priori* de la raison les configurent, la physique *classique* évite soigneusement toute interrogation de ce genre afin d'« échapper à la métaphysique ».
Cette attitude a sans aucun doute a joué un rôle déterminant dans l'essor de la physique classique, y compris ses prolongements relativistes macroscopiques. En physique quantique, les choses semblent moins simples, puisque l'épistémologie dédiée à ce domaine regorge de termes naguère réservés à la métaphysique de l'être, bref, à l'ontologie. Mais c'est une autre histoire.
Quant à l'épistémologie des mathématiques, elle aurait du mal à ne pas s'interroger sur l'être des « objets » visés. Mais ces interrogations, à l'instar de toute interrogation sur l'être – matériel ou immatériel – sont de nature métaphysique, qu'on le veuille ou non. Des prises de position ultra-positivistes n'échappent pas à la règle. Ainsi aucune investigation portant sur l'être des entités mathématiques et de leurs relations *ne se prête à une réponse tranchée*. La recherche dédiée aux fondements des mathématiques doit *intégrer* ce point, autrement dit, opérer une *conceptualisation d'ordre métaphysique* sans tomber dans les *croyances métaphysiques* en tranchant là où on ne peut pas trancher. Le recours au modèle platonicien standard en tant que dispositif de conceptualisation dépouillé de toute croyance métaphysique s'inscrit dans ce projet.

2.421 « Mathematics without foundations »?

Si la recherche dédiée au fondements mathématiques doit en dernier lieu adopter des présupposés métaphysiques, ou alors confronter de tels présupposés sans prendre partie, la seule manière d'échapper à tout abord de la métaphysique consiste, dirait-on, en l'abandon pur et simple de la recherche dédiée aux fondements mathématiques. Or, même le choix de « *mathematics without foundations* » – choix légitime en soi, des milliers de « *working mathematicians* » l'ont fait explicitement ou implicitement (comp. Heinzmann, 2006, p. 2) – ne parvient pas toujours à se mettre à l'abri de la métaphysique. Arrêtons-nous un peu là-dessus.
La tournure « *mathematics without foundations* » avancée par Hilary Putnam dans son article portant ce titre (Putnam, 1967, pp. 5 ss.) *pourrait* faire penser à une réaction *directe* aux diverses crises que la recherche dédiée aux fondements mathématiques a essuyées, notamment l'orage gödélien (Heinzmann, 2006, p.2): Puisque les mathématiques, malgré les crises affectant leurs fondements, fonctionnent dans l'ensemble très bien et donnent entière satisfaction, pourquoi ne pas oublier les fondements et les problèmes allant avec? En fait, Putnam voit les choses autrement. D'après lui, les crises rencontrées par les mathématiques seraient de « prétendues crises » (Putnam, 1967, pp. 5 ste, 9, 12 ss.). Plus précisément, les crises seraient la conséquence de la question des fondements *inutilement soulevée*. Les mathématiques n'auraient pas besoin de « fondements » pour la simple raison qu'elles sont bien là. A l'instar d'un personnage en chair et en os apercevant un objet « qui est rouge » et qui opère cette perception sans avoir besoin de tenir compte des controverses que se livrent diverses écoles de philosophie idéaliste à ce sujet, le *working mathématician* pourrait très bien travailler avec les entités mathématiques qu'il rencontre, sans se sentir concerné de la confrontation engageant telles et telles écoles philosophiques à propos des fondements et plus précisément du statut ontologique de ces entités (*ibid*.).

Est-ce vraiment si simple?
Certes, quelqu'un qui voit rouge n'a pas besoin de philosophie idéaliste pour voir rouge. De manière absolument analogue, un(e) automobiliste convenablement éméché(e) s'efforçant de rouler en ligne droite pour ne pas attirer l'attention des forces de l'ordre, n'a pas besoin de savoir que la géométrie non-euclidienne réduit cette ligne droite à une approximation locale. Pourtant, cela n'empêche pas un(e) cosmologiste de s'intéresser à la cosmologie et subséquemment aux géométries non-euclidiennes. Bref, si le *working mathematician* peut sans doute se passer des fondements mathématiques et de la philosophie allant avec, il est tout autant légitime que la philosophie s'attèle aux fondements mathématiques. Mais, quoi qu'il en soit, Putnam, lorsqu'il dit que les propositions mathématiques « sont là », il souligne qu'elles « sont là » à travers l'infinité de leurs formulations potentielles (Putnam, 1967, p.7). De telles considérations – elles s'inscrivent directement dans l'héritage de Frege – semblent dégager un petit parfum « platonicien ». Or, Putnam s'en défend. Tout en se demandant 1° pourquoi le seul fait de se référer au « platonisme » représenterait un « pêché » et 2° en quoi ce « pêché » pourrait bien consister, l'auteur – contrairement aux apparences – se distancie du platonisme qu'il qualifie d'argumentation *ad hominem* (Putnam, 1967, p.18). Admettons. Mais serait-il possible d'affirmer l'existence d'argumentations n'étant pas *ad hominem* sans recourir à des *hypothèses d'ordre métaphysique* ?

2.5 Conclusion intermédiaire

Tout au long de la séquence 2.nm, nous avons essayé de mettre en relief le gouffre qui sépare le système formel **Sy** du domaine **D** qui l'interprète. Dans un contexte plus spécifiquement mathématique, ce même gouffre s'ouvre entre l'édifice **E** et le système formel **Sy** qui le formalise ou plutôt est censé le formaliser. Parallèlement, le danger de dérapage métaphysique qui menace la recherche refusant en principe toute métaphysique s'avère bien plus sérieux qu'on ne le penserait. Mainte démarche se voulant anti-métaphysique s'inscrit à son tour dans la métaphysique sans s'en rendre compte. Il s'agit donc de prendre acte du *fait* que la zone de flou s'étalant entre le système formel **Sy** et l'édifice **E** formalisé – censé être formalisé – par **Sy** représente en matière de dérapages métaphysiques un terrain à risque élevé.
D'autre part, nous avions insisté à plusieurs reprises sur notre projet de faire du modèle platonicien standard de la connaissance un dispositif de conceptualisation dépouillé de toute métaphysique, tout en précisant qu'un tel dispositif de conceptualisation pouvait fournir un langage commun aux controverses se déclarant *nécessairement* dans un domaine où la métaphysique est difficile à éviter. Ce projet commencera à prendre forme à partir de la séquence suivante 3.nm.
Nous constaterons alors que le modèle platonicien standard, au-delà de sa fonction de langage commun et contrairement à sa réputation sulfureuse représente pour la recherche dédiée aux fondements mathématiques un moyen d'éviter tout choix métaphysique en assumant certaines formes de *complémentarité*.

3. L'approche hilbertienne sous l'angle du modèle platonicien standard de la connaissance

3.0 Feuille de route

Nous possédons maintenant tous les éléments 1° pour cerner le soi-disant « formalisme » de Hilbert et 2° pour confronter ce « formalisme » au modèle platonicien standard de la connaissance. Dans un premier temps, nous ferons abstraction de l'orage gödélien qui, d'après une *doxa* apparemment indélogeable, aurait porté *globalement* le coup de grâce au projet de Hilbert. Par la suite nous verrons que ledit orage gödélien ne change rien quant au rôle d'indispensable de dispositif de conceptualisation que le modèle platonicien standard est amené à jouer dans le cadre de la recherche dédiée aux fondements mathématiques, y compris les approches dites déflationnistes, censées contourner l'orage par une conception non-métaphysique de la vérité.

3.1 Le projet hilbertien dans la perspective pré-gödélienne

3.11 Le « formalisme » au-delà de la caricature

Rappelons que selon la caricature de l'approche hilbertienne (Zach, 2005, p. 31) les édifices mathématiques consisteraient en ces fameuses agglomérations de signes dépourvus de sens et assemblées selon des règles arbitraires etc. etc. L'approche réelle de Hilbert ne se réduit certainement pas à ce genre de platitudes, bien que de nombreux clichés du « formalisme » » circulent toujours (comp. Simons, 2012, p. 3). Nous allons conserver pour des raisons d'usage la dénomination « formalisme » couramment attribuée à l'approche de Hilbert, tout en insistant une fois de plus sur le côté plus que discutable (Hintikka 2005, p.535) de ce choix terminologique renvoyant – en raison du suffixe *-isme* à une idéologie plutôt qu'à une démarche. Quoi qu'il en soit, l'approche de Hilbert – peu importe l'étiquette qu'on lui colle – est complexe et exige une élucidation approfondie ou l'appareil conceptuel élaboré tout au long de la séquence 2.nm – centrée sur la notion d'interprétation à gauche d'un système formel **Sy** par un domaine rationnel $\mathbf{D}_{R}$ précédent **Sy** – s'avère fort utile.

Hilbert cherche à consolider des édifices mathématiques E qui – pour l'instant, sans aucune connotation platonicienne – *sont déjà là* (Hilbert, 1918/1996, p.1107). C'est une démarche de ré-élaboration. La finalité ultime du « formalisme » dans la mesure où ce terme désigne la démarche effective de Hilbert, ne peut donc pas se réduire au seul maniement de signes formels. La dimension « ré-élaboration » de cette approche se traduit par une *démarche* qualifiée de *formalisation* . Or, « formalisation » sous-entend d'emblée « formalisation *de quelque-chose* ». Posons-nous maintenant avec Snapper *la* question qu'il s'agit de poser ici, mais qu'on pose étrangement peu souvent: « Que sommes-nous en train de formaliser lorsque nous formalisons quelque-chose? » (Snapper, 1979, p. 212). La réponse de Snapper – au premier abord quelque peu inattendue – est la suivante: L'objet de toute formalisation consiste en une théorie axiomatisée donnée (Snapper, 1979, p. 213). S'attendant sans doute à l'étonnement des lectrices et lecteurs, Snapper précise aussitôt qu'on ne doit pas confondre « formalisation » et « axiomatisation ». La géométrie plane d'Euclide ou l'arithmétique ZF sont des théories axiomatisées, tandis que la formalisation ne commence qu'avec Hilbert (*ibid.*). Cette formalisation, qu'apporte-t-elle donc de nouveau par rapport l'axiomatisation qui la précède sur les plans historique et logique? Afin de répondre à cette nouvelle question, notons d'abord que le concept « axiomatisation » sous-entend à son tour « axiomatisation *de quelque-chose* ». La construction d'un système formel **Sy** sur les bases d'un certain nombre d'axiomes arbitrairement choisis n'a donc rien en commun avec l'axiomatisation d'un système *donné*. Maintenant, le « bon sens » nous incite à poser une troisième question: A quoi bon formaliser un système *déjà* axiomatisé (*ibid.*)? Cette dernière question a une réponse qui nous permet d'avancer. Axiomatiser un système *donné*, cela signifie en quelque sorte faire *comme si* on reconstruisait ce système sur les bases d'axiomes arbitrairement admis; *so als ob*; *as if* (cf. *infra*) En d'autres termes, l'axiomatisation d'un système donné représente une sorte de première ébauche – certes rudimentaire – d'une bijection $\mathbf{\Phi}$ du genre *interprétation à gauche*. Or, *si* nous ne voulons pas réduire cette première ébauche d'une bijection $\mathbf{\Phi}$ à une simple équivalence formelle $\mathbf{\Psi}$ entre des systèmes **Sy** arbitrairement fabriqués – répétons que le choix opposé dispenserait la recherche dédié aux fondements des mathématiques de toute réflexion en concernant interprétation et rendrait cette notion superflue – nous devons alors *admettre* que le système à axiomatiser est *donné* au sens absolu.

Ceci dit, cette première ébauche rudimentaire – et plus ou moins tacite – d'une $\mathbf{\Phi}$ en laquelle l'axiomatisation d'une théorie donnée consiste, s'avère d'emblée insuffisante quant à la consolidation de ladite théorie. Plus précisément, on ne peut pas se contenter d'une reconstruction sur les bases du seul ensemble d'axiomes choisis, tout en laissant l'écriture des propositions et surtout les procédures de déduction aux bons soins de l'intuition.

Idéalement, la consolidation de la théorie – le terme « théorie » est pris ici au sens le plus général, mais rien ne nous empêche de revenir au cas plus spécifique d'un édifice mathématique **E** – consiste en la mise en place d'une bijection **Φ** *stricto sensu* reliant **E** à un système formel **Sy** approprié; bijection **Φ** déclinée en ses 4 composantes $\mathbf{\Phi} \equiv \{\Phi_A, \Phi_M, \Phi_D, \Phi_{ax}\}$ et engagée sous forme d'interprétation à gauche **E** ← $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{R}}$ → **Sy**. Ce qui précède est relativement aisé à théoriser lorsqu'on dispose des ressources la théorie des modèles, ce qui n'est pas le cas de Hilbert. La théorie des modèles, remontant à Tarski, ne commence à se profiler de manière cohérente qu'à partir de 1933/35 Ce point explique que certains raisonnements de Hilbert peuvent générer des malentendus.
Mais sur les bases de la théorie des modèles – en ses aspects qui nous concernent ici – l'approche effective de Hilbert se précise après-coup. Le génie de l'auteur (Snapper, 1979, p. 214) préfigure une interprétation *à gauche* (cf. *infra*) **E** ← $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{R}}$ → **Sy** dont les composantes Φ_A, Φ_M, Φ_D, Φ_{ax} représentent la condition préalable à la consolidation de **E** au niveau de ses axiomes, de l'écriture de ses proposition et de la procédure de déduction. Si, pour un édifice mathématique donné **E**, on parvient 1° à construire un système formel **Sy** = (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**) consistant et complet, et 2° à établir entre **E** et **Sy** une bijection $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{R}} \equiv \{\Phi_A, \Phi_M, \Phi_D, \Phi_{ax}\}$, **E** est considéré comme consolidé. Le « formalisme » de Hilbert n'affirme donc nullement qu'un édifice mathématique **E** donné *serait* un assemblage de signes dépourvus de sens opéré selon des règles arbitraires etc. En construisant un système formel **Sy** *effectivement* réduit à un assemblage de signes dépourvus de sens opéré selon des règles arbitraires etc., – dans sa conférence de 1902, Hilbert précise qu'il utilise certes dans le cadre de l'« échafaudage logique » censé consolider la géométrie euclidienne les concepts propre à cette dernière *mais sans que cela soit nécessaire* (Hilbert, 1902/2004, p. 541) – et en établissant la bijection **E** ← $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{R}}$ → **Sy**, on fait *comme si* **E** *était* un système arbitraire (Zach, 2005, p.20) , afin de le consolider, ce qui change tout.
Notons que Hintikka, lorsqu'il doute de la pertinence du choix terminologique « formalisme », précise qu'on devrait considérer Hilbert plutôt comme « *an axiomatist and even a* proto-model-theorist » (Hintikka, 2005, p. 535; c'est nous qui soulignons; comp. Lenhard, 2005, pp. 3 ss.) Apercevoir en l'approche de Hilbert l'élaboration d'une « proto-théorie des modèles » se justifie sous plusieurs rapports. D'un côté, Hilbert, dans le but de dépasser l'axiomatisation traditionnelle, cherche à consolider l'édifice en recourant *avant la lettre* et *implicitement* aux Φ_A, Φ_M, Φ_D, Φ_{ax} . Il ne construit pas *explicitement* l'échafaudage intégral de la théorie des modèles dont le noyau sera ultérieurement configuré par Tarski. Ce n'est par ailleurs pas l'objectif de l'approche de Hilbert qui vise – toujours avant la lettre et implicitement – l'interprétation à gauche **E** ← $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{R}}$ → **Sy** , tandis la théorie des modèles englobe tous les cas de figure $\mathbf{D}_{\boldsymbol{K}}$ ← $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{K}}$ → **Sy** et **Sy** ← $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{K}}$ → $\mathbf{D}_{\boldsymbol{K}}$, $K = E, R$. (cf. 2.321 et 2.322).
A condition donc de nous en tenir à une interprétation à gauche, la « proto-théorie des modèles » hilbertienne s'aligne sur l'interprétation **E** = I(**Sy**) telle qu'elle est conçue dans le cadre de la théorie des modèles *stricto sensu*: Un édifice mathématique *donné* **E** (nous reviendrons sur la signification de « donné ») est reconstruit sur les bases d'une bijection **E** ← $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{R}}$ → **Sy** implicitement présente au sein de la démarche de Hilbert en raison de la présence effective de ses composantes Φ_A, Φ_M, Φ_D, Φ_{ax} : Le système formel **Sy** consiste en un langage du premier ordre doté 1° d'un alphabet **A** comportant d'une part les signes $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, = , $\forall$, $\exists$, d'autre part des signes répondant spécifiquement aux besoins de la formalisation de l'édifice **E** et enfin une liste dénombrable de signes dénotant les variables du système, 2° d'un ensemble règles de formation des formules **Rm**, 3° d'un ensemble règles de déduction **Rd** et 4° d'un ensemble d'axiomes **Ax**. L'édifice **E** est « formalisé » par **Sy** s'il se superpose en tous ses aspects à **Sy** ce qui traduit implicitement l'intervention des Φ_A, Φ_M, Φ_D, Φ_{ax} formant globalement une bijection $\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{R}}$ (comp. Snapper, 1979, pp. 213 ss. ; Hilbert 1927, doc. web sans pagination ; Hilbert & Bernays, 1934, pp. 3 ss.).

Notre exposé minimaliste de ce qu'on doit entendre par le « formalisme » de Hilbert devrait suffire pour cerner au sein de l'approche de Hilbert la place du modèle platonicien standard de la connaissance en tant que dispositif de conceptualisation dépouillé de toute métaphysique. Nous n'avons donc pas besoin d'insister sur les difficultés techniques croissantes que cette « formalisation » rencontre en affrontant des **E** de plus en plus complexes. Rappelons simplement que le génie de Hilbert se traduit par la découverte d'une démarche permettant la démonstration soit de la consistance et de la complétude, soit de la non-consistance ou non-complétude d'un édifice mathématique **E** *donné*. Notons que l'issue négative du projet global de Hilbert ne diminue en rien *ce* mérite l'auteur: Si nous savons depuis Gödel que nous ne pouvons pas démontrer simultanément la consistance et la complétude d'un édifice mathématique **E** plus puissant que la logique du premier ordre, nous le devons *en dernier lieu* au « formalisme » de Hilbert, et seulement dans une moindre mesure au « logicisme » des *Principia Mathematica* trop optimistes à ce sujet, *directement* attaqués par les deux théorèmes de Gödel, et encore moins à l'intuitionnisme de Brouwer.
Précisons encore – à l'encontre d'une fausse évidence supplémentaire – que le « formalisme » de Hilbert, dont la raison d'être consiste en l'établissement de la consistance/complétude d'un édifice **E** par des ressources finitistes, ne prétend nulle part de fonder l'« existence » de quoi que ce soit sur cet établissement de la seule consistance/complétude d'un **E** donné. L'*idéal* hilbertien renvoie à l'existence en soi d'édifices **E** où la consistance/complétude – qu'il s'agit de démontrer après-coup – repose autant sur l'existence de l'édifice **E** que cette existence de **E** repose sur la consistance/complétude que l'édifice **E** est censé exprimer (comp. Bouveresse 1998, p. 2). Ce point est à l'origine de nombreux malentendus relatifs à notre dossier, « platonisme » et « anti-platonisme » confondus. Nous reviendrons sur la notion d'existence mathématique dans la séquence 3.121 où nous reviendrons sur l'interdépendance, au niveau de l'existence mathématique, entre la consistance/complétude de Sy et de l'édifice **E** préalablement donné.

3.12 Le « formalisme » et les trois dimensions ontologique, logique et épistémologique du modèle platonicien standard

Retrouvons maintenant la place du modèle platonicien standard de la connaissance au sein du « formalisme » élucidé sous l'angle de la théorie des modèles.

3.120 Un choix à faire

Antérieurement, nous avions constaté que des propositions du genre « A l'époque des dinosaures, bien avant l'apparition de l'homo sapiens sapiens capable de s'intéresser aux fondements des mathématiques, la somme angulaire d'un triangle constitué des centres de gravité de trois cailloux trainant par là fut déjà égale à deux angles droits » exprimaient effectivement une croyance métaphysique. En raison d'une caractéristique fondamentale des croyances métaphysiques – l'impossibilité de les démontrer et de les réfuter – nous avions dû reconnaître que la négation de la proposition dinosaurienne, loin d'être « plus scientifique », rentrait dans la même catégorie tant décriée.
Reformulée et généralisée dans notre langage inspiré par la théorie des modèles, la proposition dinosaurienne donne:

- Affirmer l'existence objective d'une différence essentielle entre une bijection $\mathbf{\Phi}_R$ faisant fonction d'interprétation à gauche **E** $\leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow$ **Sy** et une bijection $\mathbf{\Psi}$ dénotant la simple équivalence formelle de deux systèmes formels **Sy** et **Sy'** exprime en dernier lieu une croyance métaphysique.

- Mais il en est de même quant à la négation de cette proposition.

Puisque une proposition métaphysique et sa négation se renvoient dos à dos, l'option de ne pas faire de la métaphysique ne nous laisse d'autre solution que d'assumer un choix entre les deux propositions 1° « Il existe une différence essentielle entre $\mathbf{\Phi}_R$ et $\mathbf{\Psi}$. » ou bien 2° « Il n'existe pas de différence essentielle entre $\mathbf{\Phi}_R$ et $\mathbf{\Psi}$. ». Au cas où nous opterions pour le choix 2°, nous admettrions du coup l'inutilité de toute recherche dédié aux fondements des mathématiques. Quant à la proposition 1°, elle présuppose par définition que l'édifice **E** soit non pas « fabriqué » mais d'une façon ou d'une autre « donné ». Dans le cas où nous opterions pour la proposition 1°, le modèle standard platonicien de la connaissance, sans prouver quoi que ce soit, deviendrait alors l'enjeu d'une discussion potentielle.
Nous optons ici pour le choix de proposition 1°, tout en soulignant qu'il s'agit d'un choix et que le choix opposé serait en dernier lieu aussi légitime (cf. *infra*). Mais, en qui concerne le choix que nous venons de faire, nous devons maintenant nous interroger sur l'éventuel rôle du modèle platonicien standard au sein du « formalisme ». Nous possédons désormais les lignes directrices d'une telle interrogation:
Nous venons de souligner à plusieurs reprises que dans le cas de figure d'une formalisation *authentique* d'un édifice mathématique **E** *via* bijection $\mathbf{\Phi}_R$ *non-réduite à une simple équivalence formelle* $\mathbf{\Psi}$, l'édifice **E** précède le système formel **Sy** qu'il interprète. Mais nous avons également précisé que la seule interprétation à gauche **E** $\leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow$ **Sy** ne serait pas suffisante – sur le plan purement conceptuel, nous ne le répéterons jamais assez – pour qualifier de « platonicienne » l'« existence » de **E**. Rappelons que ladite relation « **E** précède **Sy** », pour relever du modèle platonicien standard, doit être complétée en les termes « **E** *précède* **Sy** *sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique* ».
La formalisation au sens de Hilbert répond-t-elle à ces exigences?

3.121 Bernays

Selon J. Bouveresse, Bernays, en publiant son célèbre article *Sur le platonisme dans les mathématiques* référé à l'approche de Hilbert, « (...) a déterminé pour longtemps la façon dont l'expression « platonisme mathématique » allait être utilisée ensuite par les mathématiciens et les philosophes des mathématiques » (Bouveresse, 1998, p. 2; comp. Dumoncel, sans date, p.3). Tournons-nous donc d'abord vers cet auteur, très proche collaborateur de Hilbert.
Bernays, comparant les conceptions d'Euclide à celles de Hilbert, précise que chez ce dernier « *le système de points, de droites et de plans existe d'emblée* » (*from the outset*), tandis que « *chez Euclide, il s'agit d'entités à construire* » (Bernays, 1935, p. 2). Puisque le système « existe » « d'emblée » en soi, il précède sa formalisation **E** $\leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow$ **Sy**. L'approche de Hilbert satisfait ainsi – selon Bernays – à la première condition requise pour relever du modèle platonicien de la connaissance. Maintenant, il s'agit de déterminer si la relation « **E** précède **Sy** » manifestement présente dans l'approche de Hilbert se complète effectivement en les termes « **E** *précède* **Sy** *sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique* » (à titre de rappel: Mlika 2007, p. 39).
Ces trois dimensions sont implicitement présentes dans le texte de Bernays qui considère les objets de l'édifice **E** comme les éléments d'une globalité *donnée*. « *For each property expressible using the notions of the theory, it is an objectively determinate fact whether there is or there is not an element of the totality which possesses this property. Similary, it folows from this point of view that either all the elements of a set possess a* given *property, or there is at least one element which does not possess it.* » (Bernays, 1935, p.2; c'est nous qui soulignons.). Ajoutons la traduction de Bouveresse, traduction pas tout à fait textuelle mais d'autant plus explicite, quoique malheureusement partielle: « (…) pour toute propriété qui est exprimée au moyen des concepts de la théorie, il est déterminé objectivement s'il y a un élément dans la totalité qui possède cette propriété ou s'il y en a pas .» (Bouveresse, 1998, p. 2) Cette conception des choses comporte en

effet les trois dimensions ontologique, logique et épistémologique pré-requises en matière de modélisation platonicienne standard de la connaissance: En ce qui concerne la dimension ontologique, Bernays parle de l'existence de propriétés données. Or, cette existence des propriétés données émane *des concepts* de la la théorie considérée comme une totalité organique. Ce point ajoute à la dimension ontologique de l'existence de propriétés une dimension logique. Avant d'arriver à la troisième dimension – épistémologique – du modèle standard, notons que les propos de Bernays faisant dépendre du système entier l'existence (ou inexistence) des propriétés d'un élément donné, résument à eux seuls le manque de pertinence de toute théorie attribuant à Hilbert l'intention de réduire l'existence des éléments constitutifs d'un édifice **E** à la *seule* consistance/complétude de cet édifice (cf. *supra*, séqu. 3.11). Tant qu'on reste dans un contexte pré-gödélien, la situation se résume de la manière suivante: D'un côté, l'attribution ou non-attribution (idéalement) bien déterminée d'une propriété donnée à un élément du système **E** dépend de ce système. D'autre part, le système **E** consiste en ses éléments dotés de propriétés (idéalement) bien déterminées. En ce sens, l'existence d'un élément de **E** et de ses propriétés repose sur la consistance/complétude de **E**, tout comme la la consistance/complétude de **E** repose, comme nous l'avons affirmé plus haut sur l'existence globale de **E** dont l'existence des éléments de **E** et de leurs propriétés émane. Peut-être ce genre de self-reference de l'édifice **E** porte déjà en lui les germes du désastre gödélien, par ailleurs moins désastreux en matière de platonisme standard qu'il ne le semble. Nous le constaterons ultérieurement. Notons toutefois que certains propos de Hilbert se prêtent à des malentendus. Lorsque nous lisons des propos de Hilbert du genre « *Si on peut* (…) *démontrer que les attributs conférées à une notion ne peuvent jamais, par l'application d'un nombre fini de déductions logiques, conduire à une contradiction, je dirais que l'on a ainsi démontré l'existence mathématique de la notion en question* (…). » (Hilbert dans une conférence donnée en 1900, cité par Jacqueline Boniface, (Boniface, 2004, p.180)), nous pourrions effectivement en conclure avec l'auteure que Hilbert « (…) *faisait donc de la non-contradiction la condition non seulement nécessaire mais aussi suffisante de l'existence mathématique.* » (*ibid.*). Mais comment concilier cette conclusion avec ces autres propos de Hilbert: *No more than any other science can mathematics be founded by logic alone; rather, as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given to us in our faculty of representation, certain extra-logical concrete objects that are intuitively present as immediate experience prior to in thought. If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediate, given intuitively, together with the objects, is something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction* » (Hilbert 1927, doc. web sans pagination; le passage en question figure tout en haut, comp. Stoltzner, 2013, p. 251, comp. Corry, 2006, p.1701) ? La réponse est simple: Les deux propositions « L'existence d'une notion mathématique *est démontrée* par la non-contradiction de ses attributs. » et « L'existence d'une notion mathématique *consiste* en la non-contradiction des ses attributs. » ne sont pas identiques. Et n'oublions pas qu'entre 1900 et 1927, la pensée de Hilbert a évolué. L'œuvre de maturité de l'auteur culminant en sa théorie de la démonstration fait nécessairement face à une complexité accrue (comp. Boniface, 2002, pp. 221 ss.).

Ceci dit, tournons-nous enfin vers la troisième dimension – épistémologique – de l'approche de Hilbert: Puisque l'édifice **E**, idéalement, est censé se superposer à un système formel **Sy** approprié, l'existence de telle ou telle propriété attribuée à un élément donné se *démontre* de manière rigoureuse *via* **Sy** fabriqué par l'esprit humain, sachant que **E** précède **Sy**. Ce point semble amplement suffisant pour doter le « formalisme » de la dimension épistémologique propre au modèle platonicien standard et s'ajoutant aux deux autres dimensions ontologique et logique de l'approche du modèle. Ainsi l'appartenance du « formalisme » hilbertien à la *modélisation* platonicienne standard commence à se profiler.

Notons que Bernays distingue deux platonismes mathématiques, l'un au sens fort, l'autre au sens faible. Le premier affirme l'existence objective des entités mathématiques et de leurs relations (Bernays, 1935, p. 6). Au yeux du second, les entités mathématiques et leurs relations seraient des « projections idéalisées d'un domaine de pensée » (*ibid.*). Selon Bernays, seul le platonisme au sens faible se défendrait *(ibid.)* Nous reviendrons ultérieurement sur ce point (cf. 4.3).

3.122 Un regard génétique sur l'approche de Hilbert; sa signification relative au modèle platonicien standard

Afin d'approfondir les trois dimensions ontologique, logique et épistémologique du « formalisme » hilbertien, abordons brièvement la genèse de ce dernier. Qui dit « genèse » dit « premiers tâtonnements ». Nous verrons en effet que les difficultés philosophiques rencontrées par Hilbert fournissent des renseignements précieux pour notre investigation.
Au début de son parcours, dans ses conférences sur les fondements de la géométrie de 1902, Hilbert affirme que « *chaque science trouve son point de départ dans un corpus de faits suffisamment cohérent. » Par la suite, cette science prend forme en organisant ce corpus de faits bruts*. ((Hilbert 1902/2004, p.540; Zach, 2005, p.3) Mais que faut-il entendre par « suffisamment cohérent »? Si l'édifice **E** (ou n'importe quel domaine **D**) était un pêle-mêle de « faits bruts », le rôle de l'« organisation » serait aisé à cerner. Le système formel **Sy**, *via* $\mathbf{\Phi}_R$, mettrait de l'ordre dans **E**. En d'autres termes, **E** précèderait **Sy** sur le seul plan *ontologique*, tandis que sur le plan *logique*, la mise en ordre de **E** *via* $\mathbf{\Phi}_R$ se ferait *a posteriori*. Sous cet angle, l'affaire n'aurait *rien* de « platonicien ». Mais **E** ne peut pas être réduit à un pêle-mêle de « faits bruts » puisque selon les propos de Hilbert, **E** est censé être « suffisamment cohérent », autrement dit, « plus ou moins organisé ». Oui, mais jusqu'à quel point? Cette question s'avère primordiale, puisque sa réponse, dans la mesure où elle peut être trouvée, déterminerait en quelque sorte l'« ampleur » de l'organisation que **Sy** est censé injecter *via* $\mathbf{\Phi}_R$ dans **E**. Dans ces conditions, l'aspect *a posteriori* de la mise en ordre de **E** *via* $\mathbf{\Phi}_R$ semble déjà beaucoup moins entendu. Retrouvons donc la vision de Hilbert lui-même. Dans le document qui nous occupe ici, l'auteur affirme que le «l'organisation se met en place à travers la méthode axiomatique, i.e. on construit un échafaudage logique [constitué] de concepts (« *Logisches Fachwerk von Begriffen* ») devant satisfaire aux 3 exigences de complétude, d'indépendance et de consistance, de la sorte que « *les relations entre les concepts* correspondent *aux relations entre les faits* qu'il s'agit d'organiser. » (Hilbert 1902/2004, p.540, c'est nous qui soulignons, comp. Zach, 2005, p. 2; comp. p.6). Passant sous silence le fait que selon ses propres propos l'organisation doit être jusqu'à un certain point présente dans **E**, Hilbert évoque certes *avant la lettre* mais sans la moindre ambiguïté une interprétation à gauche **E** $\leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow$ **Sy** où non seulement le système **E** interprétant *précède* ontologiquement le système formel **Sy** à interpréter, mais où encore une dimension *logique* s'ajoute à la dimension *ontologique* qu'on détecte d'emblée dans la vision des choses de Hilbert. En effet, si les faits *à formaliser* réunis dans un système plus ou moins « cohérent » **E** sont « déjà » là « avant » d'être formalisés – c'est la dimension *ontologique* – la « correspondance » biunivoque liant les *relations* entre les « faits » de **E** aux *relations* entre les « concepts » de **Sy** s'inscrit dans la dimension *logique*. Quant à ladite « correspondance » biunivoque, nous y reconnaissons sans mal la bijection Φ_D qui, pour former $\mathbf{\Phi}_R$ reste bien entendu à compléter par les composantes Φ_A, Φ_M , Φ_{Ax} .
A ce stade de notre parcours, la conception de Hilbert de la *formalisation* se précise de la manière suivante: Le système à formaliser **E** précède sur les deux plans *ontologique* et *logique* le système formel **Sy** par lequel **E** est censé être formalisé. Mais pour trancher si la conception de Hilbert – pour le moment nous évoquons une simple *conception* et rien d'autre – relève oui ou non du modèle platonicien standard de la connaissance, il nous rester à déterminer la présence ou non-présence d'une dimension épistémologique au sein de la *conception* de l'auteur.
Cette dimension épistémologique y est effectivement. Elle réside au niveau de la formalisation en

tant que telle; formalisation que Hilbert estime nécessaire pour qu'un édifice mathématique E puisse devenir l'objet de la *connaissance stricto sensu* : Au sein d'un édifice E *donné*, les éléments *constitutifs* d'un système formel **Sy**, en l'occurrence **A**, **Rm**, **Rd**, **Ax** – on note **Sy** = (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**) – ont, ou sont susceptibles d'avoir leur équivalent (A, C, R_{dd}, Ax) au niveau de l'édifice mathématique E à formaliser, sachant que ce (A, C, R_{dd}, Ax) véhicule *nécessairement* un statut flou qui fait appel à des précisions d'ordre formel. Dans son langage traduit *a posteriori* en des termes de théorie de modèles à son tour aménagée aux besoins spécifiques du présent papier, Hilbert affirme que la reconstruction d'un édifice mathématique E à partir d'un système formel **Sy** lié à E par une bijection Φ_R consolide dans un premier temps, du moins implicitement, le quadruplet (A, C, R_{dd}, Ax) vague en soi par l'opération ($\mathsf{A} \longleftarrow\Phi_A\longrightarrow$ **A** , $\mathsf{C} \longleftarrow\Phi_M\longrightarrow$**Rm**, $\mathsf{R}_{dd}\longleftarrow\Phi_D\longrightarrow$**Rd**, $\mathsf{Ax}\longleftarrow\Phi_{Ax}\longrightarrow$**Ax**).(Hilbert, 1922/1996, p.1123).
Convaincu que l'infini ne représente *rien* de tangible pour la raison humaine, Hilbert voudrait se servir de la bijection Φ_R pour ramener toute démonstration au sein de E à un ensemble *fini* d'opérations $M_{i-1} \rightarrow M_i$ au sein de **Sy** (Hilbert, 1900/1996, p.1099) (cf.2.11). La bijection Φ_R reliant **Sy** de fabrication humaine à E précédant **Sy** sert donc à rendre les *démonstrations* de E *maîtrisables par la raison humaine*. Nous sommes ainsi en possession de la dimension épistémologique du « formalisme », dimension épistémologique dont nous avions besoin pour classer l'approche de Hilbert parmi les modélisations platoniciennes standard.
On sait que la réduction des inférences de E requérant la notion de l'infini à un ensemble *fini* d'opérations $M_{i-1} \rightarrow M_i$ au sein de **Sy** posera problème, et nous reviendrons bien entendu là-dessus.
Mais en attendant, faisons toujours comme si l'orage gödélien n'avait pas eu lieu. Le choc frontal entre les conceptions de Hilbert et les théorèmes de Gödel ne se traduit pas forcément par les stéréotypes souvent avancés à ce sujet (comp. Zach 2005, p.32; Simons,2012, pp. 21 ss.) et pour nous faire une idée circonstanciée de l'affaire, il est dans notre intérêt de cerner de près les liens entre l'approche de Hilbert en matière de formalisation et le modèle platonicien standard de la connaissance telle que nous l'avions restitué au début de ce papier.
Récapitulons donc tout en approfondissant ce qui précède. *Si* les choses s'étaient passées comme Hilbert les avait imaginées, la situation se résumerait de la manière suivante: L'édifice mathématique E précède ontologiquement le système formel **Sy** qui formalise E et que E interprète à gauche. Or, cette pré-existence de E par rapport à **Sy** est d'ordre non seulement ontologique, mais aussi logique. En effet, toute déduction $M_{i-1} \rightarrow M_i$ effectuée au sein de **Sy**, déduction correctement écrite selon **Rm** et **Rd** tout en remontant aux axiomes de **Sy** rencontre *via* bijection Φ_R son équivalent parmi les relations relevant de E. Notons encore que les deux dimensions ontologique et logique de la conception de Hilbert se rejoignent: Puisqu'un système formel **Sy** consiste en un assemblage arbitraire de signes selon certaines règles, **Sy** est nécessairement de fabrication humaine. Comme l'humain jusqu'à nouvel ordre n'est pas capable de déployer d'un seul coup *sur le papier* l'infinité de théorèmes d'un système formel **Sy**, ce dernier comporte et comportera toujours *potentiellement* des théorèmes que nul humain n'a encore *effectivement* déduits/écrits. Admettons maintenant que ce **Sy** est interprété par l'édifice mathématique E. Dans ce cas – et toujours selon la vision de Hilbert – chaque fois que nous déduisons et écrivons un théorème th_i de **Sy** que nul n'a encore effectivement déduit ni écrit, ce théorème correspond *via* Φ_R à un théorème th_i de E, théorème th_i pré-existant en tant que tel, donc ontologiquement, à la déduction de th_i correspondant dans **Sy**, ce qui revient à dire que la déduction de th_i dans **Sy** est précédée de la déductibilité de th_i dans E.
A côté de ces deux dimensions ontologique et logique qui, selon la conception – peut-être implicite mais manifeste – de Hilbert, sont intrinsèques à tout édifice mathématique E apte à la formalisation par un **Sy**, la possibilité, pour E, d'être formalisé par **Sy** *via* Φ_R apparaît comme une troisième

dimension cette fois-ci épistémologique de la formalisation de **E**, dimension ayant un impact sur les modalités d'acquisition de connaissance relative à **E** grâce auxquelles la raison humaine peut maîtriser des objets mathématiques qui – à commencer par l'infini – dépassent au départ ses ressources. Plus précisément, la bijection $\mathbf{\Phi}_R$ permet – toujours selon la conception peut-être implicite mais manifeste de Hilbert – de consolider *via* **Sy** les démonstrations relatives à **E**, notamment en cernant l'infini par un nombre fini d'opérations ce qui arrange la raison humaine à laquelle, d'après Hilbert, l'infini échappe.
En reprenant maintenant notre définition du modèle platonicien standard comme système immatériel précédant sur les deux plans ontologique et logique la connaissance que nous pouvons en avoir, tout en fournissant à notre raison les moyens d'acquérir du moins jusqu'à un certain point ces connaissances, nous réalisons que l'approche de Hilbert concernant les édifices mathématiques **E** se prête – peut-être indépendamment des intentions de l'auteur – à une *conceptualisation* en des termes de modèle platonicien standard décliné sous forme de « platonisme mathématique ».

3.13 Retour au choix épistémologique initial

Insistons sur la la formulation prudente « se prête à une *conceptualisation* en des termes de modèle platonicien standard » figurant ci-dessus. Caractériser **E** comme un système immatériel précédant **Sy** sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique ne suffit bien entendu pas pour soutenir la thèse – effectivement métaphysique – de l'existence « objective » de **E**. Le seul aspect immatériel d'un **E** précédant **Sy** sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique ne nous autorise pas d'exclure d'emblée que **E** soit de « fabrication humaine ».
Rappelons le problème de départ de la présente séquence 3.nm, en l'occurrence la distinction de la formalisation authentique **E** $\leftarrow$ $\mathbf{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **Sy** à l'égard d'une simple équivalence formelle **Sy'** $\leftarrow$ $\mathbf{\Psi}$ $\rightarrow$ **Sy**. Nous avions vu qu'en dernier lieu cette distinction n'était pas possible sans recours à des présupposés métaphysiques. La proposition « **E** existe objectivement » n'est ni plus, ni moins 'métaphysique' que sa négation « **E** est de fabrication humaine ». Certes, l'option « **E** est de fabrication humaine » entraîne des conséquences assez schizoïdes (cf. 2.321), mais cela n'est en aucune façon une raison suffisante pour affirmer métaphysiquement le contraire, et nous n'avons toujours pas la moindre intention d'agir de la sorte. Au terme de la séquence 3.120, nous étions arrivé(e)s au résultat que l'option « « **E** $\leftarrow$ $\mathbf{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **Sy**» est irréductible à « **Sy'** $\leftarrow$ $\mathbf{\Psi}$ $\rightarrow$ **Sy** »» était un *choix* parmi deux alternatives se renvoyant dos à dos et qu'il fallait également tenir compte du choix opposé « Dans «**E** $\leftarrow$ $\mathbf{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **Sy**», «**Sy'** » peut être substitué à «**E**» et «$\mathbf{\Psi}$ » à «$\mathbf{\Phi}_R$» ».
A ce stade – encore « pré-gödélien » – de la présente investigation, notre refus de recourir à des présupposés métaphysiques ne nous laisse d'autre issue que d'accepter la double dichotomie suivante:

- Si nous voulons envisager une formalisation **E** $\leftarrow$ $\mathbf{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **Sy**, nous devons postuler l'irréductibilité de $\mathbf{\Phi}_R$ à $\mathbf{\Psi}$.
  Si nous refusons de postuler l'irréductibilité de $\mathbf{\Phi}_R$ à $\mathbf{\Psi}$, nous ne pouvons pas envisager une formalisation **E** $\leftarrow$ $\mathbf{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **Sy**.

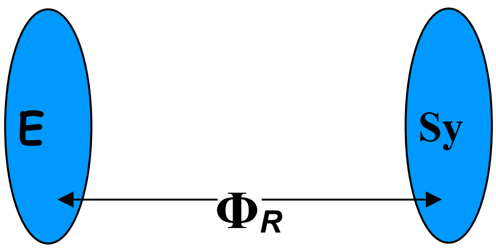
- Au cas où nous opterions pour l'irréductibilité de $\mathbf{\Phi}_R$ à $\mathbf{\Psi}$, la possibilité d'une formalisation **E** $\leftarrow$ $\mathbf{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **Sy** présupposerait que **E** précède **Sy** sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique.
  Si nous refusons que **E** précède **Sy** sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, nous nions la possibilité d'une formalisation **E** $\leftarrow$ $\mathbf{\Phi}_R$ $\rightarrow$ **Sy**.

Ce schéma dichotomique « a ⇒ b *ou bien* non-b ⇒ non-a » dont l'acceptation représente l'unique manière d'aborder la recherche dédiée aux fondements mathématiques sans recourir à des présupposés métaphysiques, nous accompagnera jusqu'au bout du présent papier.
Remarquons que la dichotomie figurant ci-dessus s'inscrit dans le contexte pré-gödélien auquel nous nous sommes jusqu'ici référé(e)s. Les théorèmes de Gödel n'y sont pour rien. Ces théorèmes ont certes provoqué un choc particulièrement brutal. Mais les racines du malaise affectant la recherche dédiée aux fondements mathématiques semblent plus profondes et la nécessité d'accepter en tant que telle ladite dichotomie pour échapper au recours à des présupposés métaphysiques n'y est peut-être pas étrangère.
Ceci dit, c'est maintenant le moment de nous poser la question si les théorèmes de Gödel ne font pas de toute façon voler en éclats le « platonisme mathématique », quelque soit l'option que nous adoptons à ce propos. Nous verrons qu'il n'en est rien.

3.2 Le projet hilbertien sous l 'angle de l'orage gödélien

3.21 Les théorèmes de Gödel et l'écueil finitiste

Le *projet* de Hilbert présuppose du moins implicitement la possibilité de démontrer que pour tout édifice mathématique E, il existe un système formel **Sy** tel que **Sy** = I(E), autrement dit, $\exists\ \mathbf{\Phi}$, $\mathsf{E} \leftarrow \mathbf{\Phi} \rightarrow$ **Sy**. *Si* ce projet avait abouti, nous pourrions représenter la formalisation **Sy** = I(E) par le diagramme (3-1):

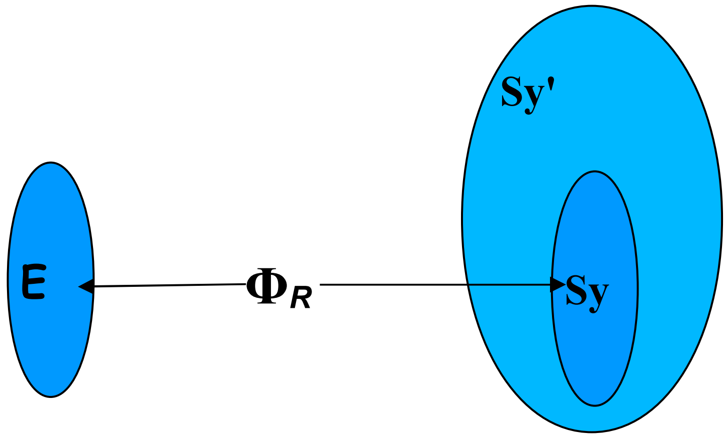


(3-1)

Or, en raison des deux théorèmes de Gödel, le projet hilbertien a dû être définitivement abandonnée, du moins en sa version initiale.
Le système formel **Sy** dénommé « arithmétique formelle » (**AF**) est *censée* fournir la formalisation de l'édifice mathématique E dit « arithmétique intuitive » (AI). Autrement dit, on « devrait » disposer d'une bijection $\mathsf{AI} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow$ **AF**. Or, les deux théorèmes de Gödel démontrent respectivement: 1° Il existe une proposition M_i de AI censée être vraie dans AI mais correspondant à un mot M_i de **AF** dont on ne peut pas démontrer *à l'intérieur* de **AF** le statut de théorème, ni celui de non-théorème. La correspondance $\mathsf{AI} \leftrightarrow$ **AF** n'est donc pas une bijection $\mathbf{\Phi}_R$. 2° Si **AF** est consistant, il est impossible de le démontrer à *l'intérieur* de **AF**.
Le deuxième théorème de Gödel a un corollaire essentiel quant à la suite: Une démonstration de la consistance de **AF** qui « tient » traduit *ipso facto* la non-complétude de **AF**. Il ne peut pas en être autrement, puisque la démonstration de la consistance de **AF** recourt nécessairement à des axiomes qui n'appartiennent pas à **AF**.
Ce double-problème affectant **AF** concerne également tout système formel **Sy** « plus puissant » que **AF**.
L'expression-clé, *dans notre contexte*, est bien entendu « à l'intérieur de **AF** ». Les deux théorèmes de Gödel ne s'opposent pas *a priori* à ce qu'on intègre **AF** *censé* formaliser AI, ou de manière plus générale, à ce qu'on intègre **Sy** *censé* formaliser E dans un système plus « puissant » **Sy'** afin d'assurer 1° la consistance de **Sy** , et 2° le statut de bijection $\mathbf{\Phi}_R$ à la correspondance $\mathsf{E} \leftrightarrow$ **Sy**.

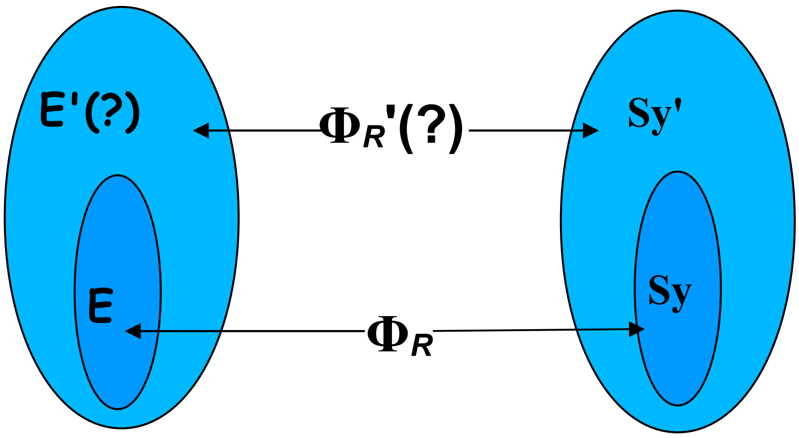
Mais l'opération matérialisée par la figure (3-2) *requiert* des données qui ne figurent pas dans (3-2) et que nous représentons par le biais de la figure (3-3) où « $\mathbf{\Phi_R'(?)}$ » dénote une bijection hypothétique dont l'existence « réelle » dépend de présupposées n'appartenant ni à **Sy'** , ni à **Sy**.

L'interprétation *stricto sensu* de **E** par **Sy**, ou dans notre cas, plus spécialement la *formalisation stricto sensu* de **E** par **Sy** n'admet pas un « **Sy** 'renforcé de l'extérieur' ». Puisque d'une part le quadruplet **Sy** = (**A**, **Rm**, **Rd**, **Ax**) n'est pas en mesure de formaliser **E** et doit être intégré dans un système formel plus puissant **Sy'** doté de son quadruplet (**A'**, **Rm'**, **Rd'**, **Ax'**), et comme d'autre part une formalisation s'opère par définition *via* une bijection $\mathbf{\Phi}$ réunissant les quatre composantes Φ_A, Φ_M , Φ_D ,Φ_{ax}, l'intégration de **Sy** dans **Sy'** tient seulement s'il existe une bijection $\mathbf{\Phi'}$ reliant **Sy'** à travers ses quatre composantes Φ_A', Φ_M', Φ_D' ,Φ_{ax}' à une extension **E'** du domaine **E**, extension **E'** dont l'existence est – du moins sur le plan *conceptuel* – *pré-requise* à la formalisation de **E**.



(3-2)

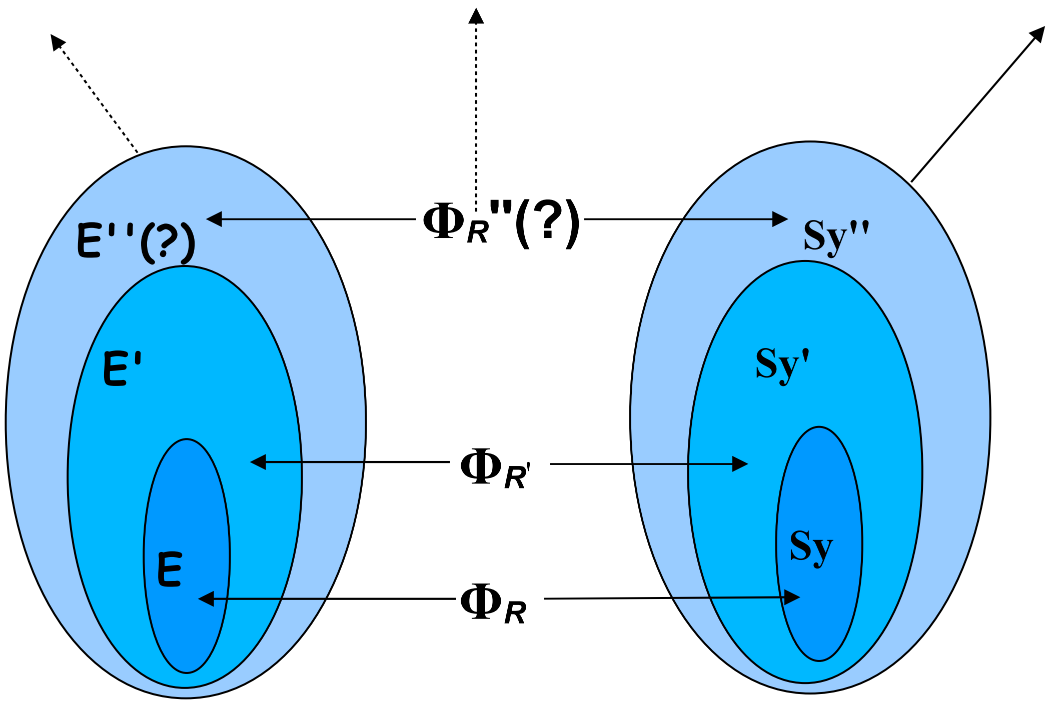
(Bien entendu, ce « choix conservatif » possède une alternative, le choix non-conservatif admettant l'intégration de **Sy** dans **Sy'**, sans pour autant *requérir* l'existence d'une bijection $\mathbf{\Phi'}$ reliant **Sy'** à travers ses quatre composantes Φ_A', Φ_M', Φ_D' ,Φ_{ax}' à une extension **E'**. Oui, mais ce choix non-conservatif n'a rien en commun avec une formalisation *stricto sensu*. Nous reviendrons largement sur ce point (cf. 4.2)).



(3-3)

Or, ce que nous venons de dire quant à **Sy** s'applique également à **Sy'**. Celui-ci doit à son tour être intégré dans un système plus large **Sy''**, ce qui pré-requiert l'existence l'existence à la fois d'une extension **E''** de **E'** d'une bijection $\mathbf{\Phi''}$ comportant toutes ses composantes Φ_A'', Φ_M'', Φ_D'' ,Φ_{ax}'' telle que **E''** ← $\mathbf{\Phi_R}$ → **Sy''**, *et ainsi de suite jusqu'à à l'infini* (figure (3-3); page suivante).

C'est *en dernier lieu* cette extension *à l'infini* E → E' → E'' … … que Hilbert avait tenté d'éviter par son approche *finitiste*. Suite aux théorèmes de Gödel, cette approche a dû être abandonnée en tant que telle. Un *working mathematician* travaillant effectivement sur un édifice mathématique E donné doit désormais se contenter de *l'hypothèse de travail* que E soit complet et consistant.
Essayons maintenant de reformuler cette *hypothèse de travail* en fonction de ce qui précède, et d'en tirer les conséquences qui s'imposent.



(3-4)

3.22 Formalisation « au sens faible » et « au sens semi-faible »

Commençons en remplaçant les apostrophes affectés aux signes **Sy**, E, **Φ** – par exemple **Sy'**, E'', … – par des indices de numérotation 0, 1, 2, … … telle que « $\mathbf{Sy}^0$ » corresponde à « **Sy** », « $\mathbf{Sy}^1$ » à « **Sy'** »,« $\mathbf{Sy}^2$» à « **Sy''**» , «E^1 » à «E' », «E^3 » à « E'''», « $\mathbf{\Phi}^7$ » à « **Φ'''''''** » etc.
Admettons d'autre part qu'à l'opposé de *l'impossible* démonstration de la proposition « E^n est complet et consistant » présupposant nécessairement que $\mathbf{Sy}^n$ puise sa consistance/complétude dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$, sachant que $\mathbf{Sy}^{n+1}$ doit s'appuyer de manière analogue sur $\mathbf{Sy}^{n+2}$, $\mathbf{Sy}^{n+2}$ sur $\mathbf{Sy}^{n+3}$ … … , la *simple hypothèse de travail* « E^n est complet et consistant » se satisfasse de la présupposition « E^n est formalisé par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ auquel l'intégration dans un système formel plus puissant $\mathbf{Sy}^{n+1}$ confère consistance et complétude », *en attendant* que la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n+1}$ soit à son tour assurée par son intégration à $\mathbf{Sy}^{n+2}$ et ainsi de suite.
Remarquons que les propos précédents, ainsi que les notions de « formalisation au sens faible » et de « formalisation au sens semi-faible » que nous nous apprêtons à introduire (cf. *infra*) semblent positionner les présentes inférences parmi les approches dites « déflationnistes ». En fait, c'est plus complexe. Pour l'instant, nous nous contentons de préciser que les deux notions de formalisation au sens faible/au sens semi-faible nous servent plutôt de repaires par rapport auxquels nous comptons *situer* l'approche déflationniste. En attendant, mettons cette partie du dossier entre parenthèses, afin de ne pas trop compliquer les choses. Mais nous reviendrons bien entendu là-dessus, puisque le rôle du modèle platonicien standard de dispositif de conceptualisation dans le cadre des approches

déflationnistes appartient essentiellement à notre champ d'investigation. (cf. 4.2)
Ceci-dit, introduisons maintenant les notions de formalisation au sens faible/au sens semi-faible d'un édifice mathématique E^n par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ ». Reprenons momentanément la figure (3-3) dénotant que pour assurer à la relation $\mathsf{E} \leftarrow \Phi_R \rightarrow \mathbf{Sy}$ le statut de bijection, le système formel **Sy** doit être intégré dans un système plus puissant $\mathbf{Sy}'$ ce qui pré-requiert l'existence – jusqu'à nouvel ordre hypothétique – d'une bijection Φ_R' et d'un édifice mathématique E' allant avec. Notre notation par indices permet une formulation plus générale du point précédent: « Pour assurer le statut de bijection de la relation $\mathsf{E}^n \leftarrow \Phi_R^n \rightarrow \mathbf{Sy}^n$, le système formel $\mathbf{Sy}^n$ doit être intégré dans un système plus puissant $\mathbf{Sy}^{n+1}$ ce qui pré-requiert l'existence *hypothétique*, i.e. l'existence qui reste à établir d'une bijection Φ_R^{n+1} et d'un édifice mathématique E^{n+1} allant avec. ». Réunissons maintenant la bijection Φ_R^n et la bijection hypothétique Φ_R^{n+1} dans un *être hybride* noté « $\Phi_R^{n/n+1}$ » et à lire:

« $\Phi_R^{n/n+1}$ » ≡ « Φ_R est une bijection $\mathsf{E}^n \leftarrow \Phi_R^n \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ par
rapport à $\mathbf{Sy}^n$, (3-5)
Φ_R est une simple relation non spécifiée
$\mathsf{E}^{n+1} \leftarrow \mathsf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+1}$ par rapport à $\mathbf{Sy}^{n+1}$ »

En nous servant de (3-5), nous définissons alors la « formalisation au sens faible » et la « formalisation au sens semi-faible » d'un édifice mathématique E^n par un système formel $\mathbf{Sy}^n$:

(**Définition 3.1**) Un édifice mathématique E^n est « formalisé au sens faible » par le système formel $\mathbf{Sy}^n$ si et seulement s'il existe une relation hybride $\Phi_R^{n/n+1}$ entre $\mathbf{Sy}^n$ et E^n selon (3-5).

(**Définition 3.2**) Un édifice mathématique E^n est « formalisé au sens semi-faible » par le système formel $\mathbf{Sy}^n$ si et seulement s'il existe 1° au moins deux systèmes $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+2}$ étant plus puissant que $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n+1}$ étant plus puissant que $\mathbf{Sy}^n$, tels que $\mathbf{Sy}^n \subset \mathbf{Sy}^{n+1} \subset \mathbf{Sy}^{n+2}$, 2° une relation hybride $\Phi_R^{n/n+1}$ entre $\mathbf{Sy}^n$ et E^n selon (3-5) et 3° une relation hybride $\Phi_R^{n+1/n+2}$ entre $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et E^{n+1} selon (3-5) telle que $\mathsf{E}^{n+1} \leftarrow \mathsf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+1} = \mathsf{E}^{n+1} \leftarrow \Phi_R^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+1}$.

Intuitivement parlant, la « formalisation au sens faible » de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ dénote le *choix* d'une maîtrise formelle *relative* de E^n *via* la bijection Φ_R^n entre E^n et $\mathbf{Sy}^n$, sachant que $\mathbf{Sy}^n$, pour assurer sa consistance/complétude, doit être intégré dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$ dont la consistance/complétude reste d'une façon ou d'une autre « en suspens ».
Quant à la définition (3.2) de la « formalisation de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ au sens semi-faible », son sens intuitif revoie à cet autre *choix* d'une maîtrise formelle *relative* de E^n *via* la bijection Φ_R^n entre E^n et $\mathbf{Sy}^n$, sachant que la la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^n$ est assurée par l'intégration de ce dernier dans un $\mathbf{Sy}^{n+1}$ plus puissant.
Au premier abord, une telle « formalisation au sens semi-faible » *paraît parfaitement inutile*: Sur le plan purement logique et *à condition que nous adoptions le point de vue finitiste*, la formalisation de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ au sens semi-faible, dans l'absolu, ne diffère pas de la formalisation de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ au sens strictement faible. Considérons un édifice E^n qu'il s'agit de formaliser semi-faiblement par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ dont la consistance/complétude est assurée par l'intégration de $\mathbf{Sy}^n$ dans un

système plus puissant $\mathbf{Sy}^{n+1}$. Par définition, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ doit être rendu consistant/complet par son intégration dans un système encore plus puissant $\mathbf{Sy}^{n+2}$. Pourvu que l'édifice E^{n+1} censé être l'extension de E^{n} correspondant à l'extension de $\mathbf{Sy}^{n}$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$ existe – insistons sur ce point qui sera déterminant par la suite – le statut *conservatif* des extensions de $\mathbf{Sy}^{n}$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et de E^{n} à E^{n+1} assuré par l'extension de $\mathbf{Sy}^{n+1}$ à $\mathbf{Sy}^{n+2}$ nous permet d'écrire $\mathbf{Sy}^{m} \equiv \mathbf{Sy}^{n} \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathsf{E}^{m} \equiv \mathsf{E}^{n} \cup \mathsf{E}^{n+1}$. Or, il n'existe aucune différence formelle entre l'établissement d'une bijection $\mathsf{E}^{n} \leftarrow \mathbf{\Phi}_{R}{}^{n} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n}$ grâce à l'extension de $\mathbf{Sy}^{n}$ par $\mathbf{Sy}^{n+1}$ où la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n+1}$ reste « en suspens », et l'établissement de cette autre bijection $\mathsf{E}^{m} \leftarrow \mathbf{\Phi}_{R}{}^{m} \rightarrow \mathbf{Sy}^{m}$ grâce à l'extension de $\mathbf{Sy}^{m}$ à $\mathbf{Sy}^{n+2}$ où cette fois-ci le « suspens » affecte $\mathbf{Sy}^{n+2}$. *Sous cet angle*, les deux formalisations au sens faible et au sens semi-faible sont effectivement *équivalentes*.
Quant à la *différence* entre la formalisation au sens faible et de la formalisation au sens semi-faible, différence qui s'oppose à la réduction de leur équivalence formelle à une identité, elle est d'ordre non pas logique, mais *épistémologique*. Avant d'aborder ce point, arrêtons-nous brièvement sur l'aspect essentiellement finitiste de ladite équivalence.
Considérons une série $\boldsymbol{Sy}$ de systèmes formels $\mathbf{Sy}^{n}$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$, … tels que $\forall$k, k = 0, 1, 2, …, $\mathbf{Sy}^{n+k-1} \subset \mathbf{Sy}^{n+k}$, ainsi qu'une série $\boldsymbol{\mathsf{E}}$ d'édifices mathématiques E^{n}, E^{n+1} , E^{n+2}, …, tels que $\forall$j, j = 1, 2, …, $\mathsf{E}^{n+k-1} \subset \mathsf{E}^{n+k}$. Appelons « partie conservative $\boldsymbol{Sy}^{n+k}$ du couple ($\boldsymbol{\mathsf{E}}$, $\boldsymbol{Sy}$) » l'ensemble des $\mathbf{Sy}^{n+k}$ dont la consistance/complétude est assurée par l'intégration de dans $\mathbf{Sy}^{n+k+1}$, à condition toutefois 1° que la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n+k+1}$ est assurée par son intégration dans $\mathbf{Sy}^{n+k+2}$, et 2° qu'il existe des édifices E^{n+k} , E^{n+k+1}, ainsi que les relations hybrides $\mathbf{\Phi}_{R}{}^{n+k/n+k+1}$ et $\mathbf{\Phi}_{R}{}^{n+k+1/n+k+2}$ (cf. définition 3-5) établissant respectivement les bijections $\mathsf{E}^{n+k} \leftarrow \mathbf{\Phi}_{R}{}^{n+k} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+k}$ et $\mathsf{E}^{n+k+1} \leftarrow \mathbf{\Phi}_{R}{}^{n+k+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+k+1}$. Appelons « élément non-conservatif du couple ($\boldsymbol{\mathsf{E}}$, $\boldsymbol{Sy}$) le premier $\mathbf{Sy}^{j}$ de $\boldsymbol{Sy}$ qui assure la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{j-1}$, $\mathbf{Sy}^{j-1} \subset \mathbf{Sy}^{j}$, sachant que la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{j}$ « reste en suspens ». Les $\mathbf{Sy}^{h}$, h $\geq$ j , constituent ainsi la « partie non-conservative $\boldsymbol{Sy}^{j}$ du couple ($\boldsymbol{\mathsf{E}}$, $\boldsymbol{Sy}$) ».
L'introduction des « parties conservative et non-conservative du couple ($\boldsymbol{\mathsf{E}}$, $\boldsymbol{Sy}$) » représente bien entendu une généralisation de la formalisation au sens faible et semble – d'un point de vue à la fois finitiste et purement formel – souligner l'inutilité de la formalisation au sens semi-faible. Quelque soit la longueur n + k de la partie conservative $\boldsymbol{Sy}^{n+k}$, la consistance/complétude de ($\boldsymbol{\mathsf{E}}^{n+k}$, $\boldsymbol{Sy}^{n+k}$) est assurée par $\boldsymbol{Sy}^{j}$ dont la propre consistance/complétude « reste en suspens ». Or, il est évident que la distinction des deux parties conservative et non-conservative de ($\boldsymbol{\mathsf{E}}$, $\boldsymbol{Sy}$) présuppose *l'existence effective* de l'élément non-conservatif $\mathbf{Sy}^{j}$. Si nous supposions – insistons sur le conditionnel – que pour tout k positif ou nul, la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n+k+1}$ établissant une bijection $\mathsf{E}^{n+k} \leftarrow \mathbf{\Phi}_{R}{}^{n+k} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+k}$ soit à son tour garantie par l'intégration de $\mathbf{Sy}^{n+k+1}$ dans $\mathbf{Sy}^{n+k+2}$, sachant que cette extension établit une bijection $\mathsf{E}^{n+k+1} \leftarrow \mathbf{\Phi}_{R}{}^{n+k+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+k+1}$, la distinction des parties conservative et non-conservative de ($\boldsymbol{\mathsf{E}}$, $\boldsymbol{Sy}$) perdrait sa raison d'être. Il va de soi que cette supposition de l'inexistence de l'élément non-conservatif relève littéralement de la quintessence des croyances métaphysiques. Mais n'oublions pas non plus que *par définition*, il en est de même quant à négation de cette supposition. Autrement dit, en matière de fondements des mathématiques, *le point de vue finitiste est aussi « métaphysique » que le point de vue infinitiste*.
Si nous ne voulons pas pas faire de métaphysique, nous devons renvoyer dos à dos ces deux points de vue , que cela nous plaise ou non. Ainsi se profile déjà la version post-gödélienne – complexifiée – de la dichotomie affectant le « formalisme » hilbertien telle que nous venons de la rencontrer dans le contexte pré-gödélien (cf. 3.13). En attendant d'y arriver, retrouvons maintenant la différentiation des deux formalisations aux sens respectivement faible et semi-faible qui existe au-delà de leur équivalence formelle.
Cette différentiation – *épistémologique* comme nous l'avions précisé plus haut – devient manifeste lorsque nous considérons la *transformation* de la composante non-spécifique R^{n+1} appartenant à la

relation hybride $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n/n+1}$, en bijection $\boldsymbol{\Phi}_{r}^{n+1}$, *transformation effectivement présente* au sein de la définition (3.2) et absente dans la définition (3.1).
Considérons un édifice mathématique E^{n} relié à un système formel $\mathbf{Sy}^{n}$ par une bijection $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$, tout en admettant que la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n}$ ne peut pas être établie « à l'intérieur » de ce système. D'après notre définition (3.2), ce cas de figure représente une formalisation au sens semi-faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ si et seulement si on parvient à opérer au moins 1° une extension de $\mathbf{Sy}^{n}$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$ conférant à $\mathbf{Sy}^{n}$ consistance *et* complétude et 2° une extension de $\mathbf{Sy}^{n+1}$ à $\mathbf{Sy}^{n+2}$ établissant à son tour la consistance *et* complétude de $\mathbf{Sy}^{n+1}$. La première extension $\mathbf{Sy}^{n} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+1}$ fait de $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$ une relation hybride $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n/n+1}$. La seconde extension $\mathbf{Sy}^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+2}$ impose l'hybridité de $\boldsymbol{\Phi}_{R}$ par rapport à $\mathbf{Sy}^{n+2}$, mais transforme $\boldsymbol{\Phi}_{R}$ par rapport à $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n} \subset \mathbf{Sy}^{n+1}$, en bijection $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n+1}$ à part entière reliant $\mathbf{Sy}^{n+1}$ à E^{n+1}, l'édifice E^{n} étant supposé complété à son tour par une extension $\mathsf{E}^{n} \rightarrow \mathsf{E}^{n+1}$, $\mathsf{E}^{n} \subset \mathsf{E}^{n+1}$.
N'oublions pas qu'une bijection $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$ comporte les quatre composantes Φ_{A}^{n}, Φ_{M}^{n}, Φ_{D}^{n}, Φ_{Ax}^{n}. A travers les composantes bijectives Φ_{A}^{n+1}, Φ_{M}^{n+1}, Φ_{D}^{n+1}, Φ_{Ax}^{n+1} de $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n+1}$, l'extension $\mathbf{Sy}^{n} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+1}$ fondant la consistance/complétude au niveau de $\mathbf{Sy}^{n+1}$ sur l'extension $\mathbf{Sy}^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+2}$ doit *répondre* à la consistance/complétude de E^{n+1}, $\mathsf{E}^{n} \subset \mathsf{E}^{n+1}$, sinon une bijection globale ne serait pas envisageable. Pour que l'extension $\mathbf{Sy}^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+2}$ puisse *répondre* à la consistance/complétude de E^{n+1}, nous devons admettre que E^{n+1} *précède* d'une façon ou d'une autre $\mathbf{Sy}^{n+2}$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n}$ et E^{n}.
Si maintenant nous faisons le choix de ne pas vouloir réduire la *question* de la formalisation de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ *via* $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$ à l'établissement d'une simple équivalence formelle $\boldsymbol{\Psi}$, nous devons en plus admettre que E^{n+1} *précède* $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n}$ et E^{n} sur *les trois plans ontologique, logique et épistémologique*.
Il s'agit là d'un choix – répétons-le – aussi légitime que le choix opposé, et vice-versa. Or, la formulation de ce choix comme celle de sa négation exige le recours au modèle platonicien standard en tant que dispositif de conceptualisation.

3.223 La formalisation faible et semi-faible sous l'angle du modèle platonicien standard en tant que dispositif de conceptualisation

La double dichotomie affectant le « formalisme » hilbertien telle que nous l'avions rencontrée à la fin de la séquence 3.13 dans le contexte pré-gödélien conserve dans le contexte post-gödélien sa structure « a ⇒ b *ou bien* non-b ⇒ non-a ». Pour le reste, les choses se complexifient comme on peut s'y attendre.
Le problème de la distinction des $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$ et des $\boldsymbol{\Psi}^{n}$ se manifeste indépendamment des théorèmes de Gödel. Dans les deux contextes pré-gödélien et post-gödélien, nous devons

- nous dire qu'une réduction des $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$ à des $\boldsymbol{\Psi}^{n}$ ôterait au concept « formalisation » son sens et rendrait inutile l'investigation de la problématique liée à la formalisation en tant que démarche,

et *simultanément*

- reconnaître que la distinction des $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$ et des $\boldsymbol{\Psi}^{n}$ repose en dernier lieu sur des croyances métaphysiques.

A ce niveau, la double dichotomie affectant le « formalisme » hilbertien reste identique à elle-même.
Au cas où nous opterions pour la non-réductibilité des $\boldsymbol{\Phi}_{R}^{n}$ à des $\boldsymbol{\Psi}^{n}$, les choses changeraient en revanche dans le contexte post-gödélien. Puisqu'en raison des théorèmes de Gödel la formalisation

stricto sensu d'un édifice mathématique E^n par $\mathbf{Sy}^n$ n'est pas possible, la démarche *héritière* du « formalisme » doit se contenter soit d'une formalisation au sens faible de E^n lié à $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ par $\mathbf{\Phi}_R^{n/n+1}$, soit d'une formalisation au sens semi-faible .
Le choix entre la formalisation au sens faible et la formalisation au sens semi-faible – les deux choix sont chacun aussi légitime que l'autre – se heurte à quelques problèmes de fond.
La formalisation au sens faible risque d'entraîner le malaise épistémologique accompagnant toute solution *ad hoc*. L'aspect *d'emblée non-conservatif* de ce choix qui de surcroît échappe à la contrainte du retour de bijection nécessitant l'existence d'un édifice E^{n+1} allant avec le système formel $\mathbf{Sy}^{n+1}$ faisant fonction d'extension de $\mathbf{Sy}^n$, nous permet d'assurer la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^n$ (et du coup de E^n) en construisant un $\mathbf{Sy}^{n+1}$ *sur mesure*. D'un point de vue scientifique, une telle démarche semble peu satisfaisante.
Admettons donc que ayons fait le choix d'une formalisation au sens semi-faible.
D'après ce qui précède, la « formalisation au sens semi-faible » de E^n, au cas où elle tiendrait grâce à l'existence d'un système formel $\mathbf{Sy}^{n+2}$ garantissant la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n+1}$, transformerait la relation hybride $\mathbf{\Phi}_R^{n/n+1}$ en bijection $\mathbf{\Phi}_R^{n+1}$. Or, par « retour de bijection » (cf. 3.223), $\mathbf{\Phi}_R^{n+1}$ requiert l'existence sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique – dénotée par les composantes bijectives Φ_A^{n+1}, Φ_M^{n+1}, Φ_D^{n+1} ,Φ_{Ax}^{n+1} – d'un édifice mathématique E^{n+1} adéquat englobant E^n tout en précédent E^n, ainsi que $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^n$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. Cette pré-existence ne peut être ni prouvée, ni réfutée.
Comme 1° les deux options « formalisation authentique d'un édifice E^n en des termes de $\mathbf{\Phi}^n$ » et « réduction de $\mathbf{\Phi}^n$ à une simple équivalence formelle $\mathbf{\Psi}^n$ entre $\mathbf{Sy}^n$ et E^n réduit à un $\mathbf{Sy}^n$-bis de 'fabrication humaine' » se renvoient toujours dos à dos, comme 2° le choix entre la première option n'est ni plus, ni moins « métaphysique » que l'autre option et vice-versa, comme 3° le premier choix possible présuppose la pré-existence ni démontrable ni réfutable de E^{n+1} par rapport à E^n ainsi qu'aux systèmes formels $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^n$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, et comme enfin 4° la *notion* de pré-existence, sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, de E^{n+1} par rapport à un autre système rationnel E^n, $\mathbf{Sy}^{n+2}$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^n$ renvoie par définition au modèle platonicien standard de la connaissance, ce dernier représente un incontournable élément de conceptualisation dans le cadre du débat sur la formalisation d'un édifice mathématique E^n donné.
Nous n'avons donc pas d'autre choix que de recourir au modèle platonicien standard pour reformuler dans le contexte post-gödélien la double dichotomie de la séquence 3.13:

- Si nous voulons envisager la seule *question* d'une formalisation $\mathsf{E} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow \mathbf{Sy}$, nous devons postuler l'irréductibilité de $\mathbf{\Phi}_R$ à $\mathbf{\Psi}$.
  Si nous refusons l'irréductibilité de $\mathbf{\Phi}_R$ à $\mathbf{\Psi}$, nous ne pouvons même pas envisager la question d'une formalisation $\mathsf{E} \leftarrow \mathbf{\Phi}_R \rightarrow \mathbf{Sy}$.

- Au cas où nous opterions pour l'irréductibilité de $\mathbf{\Phi}_R$ à $\mathbf{\Psi}$, la possibilité d'une formalisation au sens semi-faible d'un édifice mathématique E^n par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ présupposerait l'existence d'un édifice mathématique E^{n+1}, $\mathsf{E}^n \neq \mathsf{E}^{n+1} \wedge \mathsf{E}^n \subset \mathsf{E}^{n+1}$, E^{n+1} précédant E^n, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^n$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique.
  La présupposition – certes aussi légitime que la présupposition contraire – de l'inexistence d'un édifice mathématique E^{n+1}, $\mathsf{E}^n \neq \mathsf{E}^{n+1} \wedge \mathsf{E}^n \subset \mathsf{E}^{n+1}$, E^{n+1} précédant E^n, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^n$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique réduirait la formalisation au sens semi-faible de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ à une simple équivalence formelle.

En optant pour l'inexistence d'un édifice mathématique E^{n+1} , $\mathsf{E}^{n} \neq \mathsf{E}^{n+1} \wedge \mathsf{E}^{n} \subset \mathsf{E}^{n+1}$, E^{n+1} précédant E^{n}, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n}$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique – un choix en soi aussi métaphysique que le choix opposé – nous nous résignerons à la seule possibilité d'une formalisation au sens strictement faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$. Ce choix représente, *si on veut* (cf. *infra*), l'avantage de l'économie de présupposés métaphysiques supplémentaires. Le choix de la formalisation au sens strictement faible comme ultime issue ne requiert aucune pré-existence de quoi que ce soit sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. Mais cette approche « déflationniste », comme nous l'avions déjà remarqué – et nous reviendrons là-dessus – a l'arrière-goût amère des solutions *ad hoc*. Soulignons pour une seconde fois qu'un système formel qui ne subit pas les contraintes liées à la consistance ou la complétude – et *a fortiori* aux deux – permet d'emblée la mise en place de solutions *sur mesure*.
L'autre choix, celui de la possibilité d'une formalisation de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ au sens semi-faible représente – toujours *si on veut* – un coût métaphysique plus élevé en raison de ses présupposés en matière de pré-existence sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. Mais c'est le prix à payer pour échapper à la solution *ad hoc*. Certes, au premier abord, la formalisation au sens semi-faible, formellement équivalente à la formalisation au sens strictement faible apparaît comme un pâle reflet de la formalisation hilbertienne classique, rendue caduc par les théorèmes de Gödel. Pourtant, le facteur *épistémologique* différenciant au-delà de leur équivalence formelle la formalisation au sens semi-faible et la formalisation au sens strictement faible situe la première au-dessus du statut de solution *ad hoc* menaçant la seconde. Puisque l'extension $\mathbf{Sy}^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+2}$ doit *répondre* à la consistance/complétude de E^{n+1}, $\mathsf{E}^{n} \subset \mathsf{E}^{n+1}$, la pré-existence de E^{n+1} par rapport à E^{n} , $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n}$ exclut l' « aménagement sur mesure » de $\mathbf{Sy}^{n}$ et même de $\mathbf{Sy}^{n+1}$.

Ceci dit, il convient de rappeler 1° que la double dichotomie formulée ci-dessus en sa version post-gödélienne, pour recouvrir tout son sens, présuppose pour un couple ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Sy}$) donné l'existence « objective » de l'élément non-conservatif $\mathbf{Sy}^{j}$ départageant « objectivement » ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Sy}$) en sa partie conservative et sa partie non-conservative, et 2° que l'existence « objective » de cet l'élément non-conservatif $\mathbf{Sy}^{j}$ ne peut être ni démontrée, ni réfutée. La possibilité de consolider un édifice mathématique E^{n} à travers sa formalisation semi-faible par le système $\mathbf{Sy}^{n+1}$ formel dont la consistance/complétude est assurée par son intégration dans $\mathbf{Sy}^{n+2}$, sachant 1° qu'il en est de même pour les extensions $\mathbf{Sy}^{n+2} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+3}$, $\mathbf{Sy}^{n+3} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+4}$ … … … *ad infinitum*, et 2° qu'il existe une série d'extensions $\mathsf{E}^{n} \rightarrow \mathsf{E}^{n+1}$, $\mathsf{E}^{n+1} \rightarrow \mathsf{E}^{n+2}$ … … … elle aussi infinie qui y « répond » pour former des bijections $\mathsf{E}^{n+1} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}_{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+2}$, $\mathsf{E}^{n+2} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}_{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+3}$, … … … , cette possiblité représente certes un beau rêve. Mais nul ne peut prouver que ce rêve n'est qu'un rêve, ni le contraire.
Notons que Gödel est convaincu de l'existence d'un édifice mathématique global E qui, au-delà des E^{n} , E^{n+1} , E^{n+2} … … … serait consistant. Les facultés et capacités finies de notre esprit nous empêcheraient d'accéder à ce E global, tout en nous réduisant aux E^{n} , E^{n+1} , E^{n+2} … … … dont nous ne pouvons pas établir simultanément la consistance et la complétude. Si nous possédions des esprits dotés de facultés et capacités infinies, nous aurions accès à E dont la consistance assurerait à la fois la consistance et la complétude des E^{n} , E^{n+1} , E^{n+2} … … … (Gödel, 1951/1995, p. 322 ste.; comp. p. 309 ss.).
Il est clair que la conviction de Gödel représente une croyance métaphysique. Par conséquent, il en est de même quant aux convictions opposées à celle de Gödel.
Derrière la double dichotomie figurant ci-dessus se cache de la sorte un seconde dichotomie, cette fois-ci simple:

Les deux propositions suivantes

- « L'inexistence d'une infinité d'extensions ($\mathsf{E}^{n+i} \rightarrow \mathsf{E}^{n+i+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+i+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+i+2}$), i = 0, 1, … qui assureraient *via* formalisation semi-faible *ad infinitum* la consistance-complétude de l'édifice mathématique *global* E présuppose l'existence – pourtant ni démontrable, ni réfutable – de l'élément non-conservatif au sein du couple (E, ***Sy***). »

- « L'inexistence objective – pourtant ni démontrable, ni réfutable – au sein du couple (E, ***Sy***) de l'élément non-conservatif se traduit par la possibilité d'une infinité d'extensions ($\mathsf{E}^{n+i} \rightarrow \mathsf{E}^{n+i+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+i+1} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+i+2}$), i = 0, 1, … »

se renvoient dos à dos.

Ce résultat peut paraître trivial. Mais l'acceptation de cette trivialité en tant que « 'réalité' objective » du domaine des fondements mathématiques représente – une fois de plus – l'unique manière de se montrer conséquent(e) vis-à-vis du refus de métaphysique.
Nous reviendrons sur l'omniprésence, dans le domaine des fondements mathématiques, du schéma dichotomique « a $\Rightarrow$ b *ou bien* non-b $\Rightarrow$ non-a » allant de soi depuis les théorèmes de Gödel.

4. Implications épistémologiques du modèle platonicien standard

4.1 Un ultime retour sur les croyances métaphysiques

Les inconditionnels pourfendeurs de croyances métaphysiques nous concèderont que ce premier aboutissement de notre parcours n'a rien d'une croyance métaphysique. En effet, une croyance métaphysique attribuant une vérité transcendante (ou « réalité objective » etc.) aux énoncés du modèle platonicien standard de la connaissance se formulerait selon le schéma « *Étant donné* la pré-existence sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique d'un édifice mathématique E^{n+1} par rapport à E^{n}, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n}$, (...)(...)(...) ». Le présent papier n'avance rien de tel. Nous venons juste d'essayer de montrer que la notion de formalisation, et plus spécialement de formalisation au sens semi-faible, d'un édifice mathématique E^{n} par un système formel $\mathbf{Sy}^{n}$, si elle veut rester *cohérente* quant à la distinction potentielle des systèmes *formalisés* E^{n} et des systèmes *formels* $\mathbf{Sy}^{n}$, doit tenir compte de l'*option* d'une bijection $\mathbf{\Phi}_{R}{}^{n}$ *non-réduite à une équivalence formelle* $\mathbf{\Psi}^{n}$, et, en raison de certaines propriétés intrinsèques d'une $\mathbf{\Phi}_{R}{}^{n}$ dénotées par le quadruplet ($\Phi_{A}{}^{n}$, $\Phi_{M}{}^{n}$, $\Phi_{D}{}^{n}$,$\Phi_{ax}{}^{n}$), *présupposer* l'existence d'un édifice E^{n+1} précédent E^{n} sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. Les croyances métaphysiques commenceraient à partir d'une *prise de position dans un sens ou dans l'autre* relative à cette présupposition inscrite dans une *superposition de dichotomies*. La *seule* façon d'échapper aux croyances métaphysiques consiste en l'acceptation en tant que telle de ladite superposition de dichotomies, ce qui nous amène à des formulations du genre « *Si* la formalisation au sens semi-faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ est possible, alors l'édifice E^{n+1} précède ontologiquement, logiquement et épistémologiquement l'édifice E^{n} censé être formalisé au sens semi-faible par $\mathbf{Sy}^{n}$ dont la consistance/complétude est assurée par $\mathbf{Sy}^{n+1}$. *Si* l'édifice E^{n+1} ne précède pas ontologiquement, logiquement et épistémologiquement l'édifice E^{n} censé être formalisé au sens semi-faible par $\mathbf{Sy}^{n}$, ainsi $\mathbf{Sy}^{n+1}$ assurant la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n}$, alors cette formalisation au sens semi-faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ n'est pas possible ».
Certes, il est probable que l'irréductible carré des pourfendeurs de la métaphysique reviendra encore une fois de plus à la charge: L'opposition, selon le schéma « si a, alors b *ou bien* si non-b, alors non-a » de deux termes complémentaires à exclusion réciproque nous donne inévitablement l'impression de *tourner en rond*. Mais surtout, notre conclusion « *si* possibilité de formalisation au sens semi-faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$, alors existence de E^{n+1} précédant E^{n}, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n+1}$ sur les trois plans

ontologique, logique et épistémologique; *si* non-existence de E^{n+1} précédant E^{n}, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n}$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, alors non-possibilité de formalisation au sens semi-faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ », ressemble – dirait-on – de très près à la caricature même d'une proposition tautologique, dans le genre « *Si* Dieu existe, alors il est exclu qu'Il n'existe pas. *Si* Dieu n'existe pas, alors il est exclu qu'Il existe ». En fait, c'est moins simple. Pour commencer, ne confondons pas « $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \Rightarrow \neg a$ » et « $a \Leftrightarrow \neg(\neg a)$ ». Ce détail n'est pas tout à fait négligeable. Ceci dit, nous savons certes toutes et tous que la science au sens moderne et contemporain du terme est devenue science en écartant de son d'investigation l'ensemble des hypothèses dans un premier temps qualifiées de ni vérifiables, ni réfutables, avant que le popperisme obligatoire n'ampute cette conception de sa dimension « vérification ».
Toutefois la recherche dédiée aux fondements mathématiques manifeste quelques spécificités à l'égard des autres domaines de recherches. Or, dans le contexte post-gödélien étant désormais celui de la recherche dédiée aux fondements mathématiques, peut-on encore faire quoi que ce soit sans d'emblée tenir compte du schéma « $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \Rightarrow \neg a$ » opposant des termes complémentaires à exclusion réciproque? Abstraction faite de l'option « déflationniste » sur laquelle nous reviendrons dans l'immédiat mais qui – contrairement aux apparences – ne change pas grand-chose à ces propos (cf. 4.2), il nous semble difficile d'y échapper, vu que *tout* édifice mathématique E^{n} *censé* être formalisé par un système formel $\mathbf{Sy}^{n}$ d'une puissance égale ou supérieure à celle de l'arithmétique formelle pose problème en matière de formalisation: *Si* on peut démontrer *via* formalisation hilbertienne « classique » la consistance d'un édifice mathématique E^{n}, on ne peut pas démontrer par la même voie sa complétude. *Si* on peut démontrer *via* formalisation hilbertienne « classique » la complétude d'un édifice mathématique E^{n}, on ne peut pas démontrer par la même voie sa consistance.
En attendant d'aborder l'option « déflationniste » – nous constaterons alors que le « déflationnisme » doit à son tour faire un choix entre deux complémentaires à exclusion réciproque, autrement dit, se positionner par rapport à une *dichotomie* et donc assumer *son* choix comme un choix ni plus, ni moins bien fondé que le choix opposé – en attendant donc d'aborder l'option déflationniste censée contourner, voire neutraliser la problématique post-gödélienne, évoquons un exemple montrant qu'en recherche dédiée aux fondements des mathématiques, le schéma « si a, alors b; si non-b, alors non-a » engageant des complémentaires à exclusion réciproque peut précéder l'orage gödélien, dont la prise en compte n'est dans ce cas qu'une sorte de retour aux sources: Le modèle de Klein des géométries non-euclidiennes permet la conclusion suivante: « S*i* la géométrie euclidienne est consistante, les géométries non-euclidiennes les sont aussi; *si* les géométries non-euclidiennes ne sont pas consistantes, la géométrie euclidienne ne l'est pas non plus ». Certes, l'aperception pré-gödélienne du « modèle de Klein » avait pu se refléter dans l'illusion « *Étant donné* que la géométrie euclidienne *est* consistante, les géométries non-euclidiennes le *sont* aussi; la non-consistance des géométries non-euclidiennes implique*rait* celle de la géométrie euclidienne ». L'orage gödélien ramène ainsi la lecture du modèle de Klein à ce que ce dernier représente effectivement, en l'occurrence un schéma « si a, alors b *ou bien* si non-b, alors non-a » engageant des complémentaires à exclusion réciproque. Or, nul n'aurait l'idée de comparer le modèle de Klein – qui rend les géométries non-euclidiennes *aussi plausibles*, ni plus, ni moins, que la géométrie euclidienne – à une caricature de tautologie du genre « *Si* Dieu existe, alors il est exclu qu'Il n'existe pas. *Si* Dieu n'existe pas, alors il est exclu qu'Il existe ».
La superposition de dichotomies affectant le « formalisme » hilbertien se complexifie certes lorsqu'on passe du contexte pré-gödélien au contexte post-gödélien, mais sa structure « si a, alors b *ou bien* si non-b, alors non-a » reste, comme nous l'avions vu plus haut, intacte à travers ce changement de perspective. Sous cet angle, le statut épistémologique d'entités telles que le modèle de Klein dévoilent, semble-t-il, la superposition de dichotomies comme un problème situé à la racine des fondements mathématiques, problème plus fondamental que l'orage gödélien mais dont ledit orage est une expression particulièrement percutante.
Dans la séquence suivante (4.2), nous aurons l'occasion de rappeler que la science contemporaine a

plutôt l'habitude de véhiculer des *vérités au second degré* consistant en des dichotomies objectivement présentes.

4.2 Les approches « déflationnistes » face à la pré-existence de E^{n+1} à E^{n} sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique

Les notions de « formalisation au sens faible/semi-faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ » rappellent peut-être diverses tendances dites « déflationnistes » qui, dans le domaine de la recherche contemporaine dédiée aux fondements mathématiques, semblent gagner du terrain (Vidal-Rosset, 2005, pp. 7 ss.). Pourtant, l'analyse des liens potentiels entre les notions de « formalisation au sens faible/semi-faible de E^{n} par $\mathbf{Sy}^{n}$ » *rapportée au modèle platonicien standard* et l'approche déflationniste s'avère délicate sous de nombreux rapports.

Dans la présente séquence, nous tentons de montrer que les approches « déflationnistes » *soulignent* – probablement malgré elles – la fonction essentielle de dispositif de conceptualisation non-métaphysique propre au modèle platonicien standard de la connaissance décliné sous forme de « platonisme mathématique ».

Il va de soi que depuis l'orage gödélien, la notion de vérité mathématique ne peut plus être abordée « comme avant ». Le « déflationnisme » représente une manière de tenir compte de ce fait. A ce titre, le « déflationnisme » 1° renonce – ou plutôt exprime l'intention de renoncer – à toute connotation métaphysique du concept « vérité mathématique » (Vidal-Rosset, 2005, p. 8.) et 2° introduit des conceptions de « vérités affaiblies » d'ordre *non-sémantique* (Linnebo, 2006, pp. 549 ss.). Autrement dit, le déflationnisme, afin de renoncer à toute conception « métaphysique » de la notion de « vérité mathématique », opte de manière peut-être implicite, tacite, mais *ipso facto* significative pour la réduction de $\mathbf{\Phi}^{n}$ à $\mathbf{\Psi}^{n}$ et du coup pour la réduction de E^{n} à $\mathbf{Sy}^{n}$. Or, nous avons tenté de montrer que les *deux* choix « réduction de $\mathbf{\Phi}^{n}$ à $\mathbf{\Psi}^{n}$ et du coup réduction de E^{n} à $\mathbf{Sy}^{n}$ » et « non-réduction de $\mathbf{\Phi}$ à $\mathbf{\Psi}$ et du coup non-réduction de E^{n} à $\mathbf{Sy}^{n}$ » sont *chacun* aussi « métaphysique » que le choix opposé. Ne pas vouloir faire de métaphysique mathématique revient donc à renvoyer les deux choix dos à dos au sein d'une approche définie en des termes « si a , alors b; si non-b, alors non-a ».

Ceci dit, focalisons maintenant plus spécialement sur le point 2° figurant ci-dessus.

Si depuis l'orage gödélien, on doit aborder la notion de vérité mathématique différemment, cela n'implique pas forcément la nécessité d'« affaiblir » cette notion.

Afin de voir plus clair, permettons-nous encore un petit détour par la physique. Les (trop) célèbres relations d'incertitude de Heisenberg n'ont pas « affaibli » la physique comme la vulgarisation l'insinue parfois. Représentant *en soi* – certes jusqu'à nouvel ordre; Karl Popper oblige – une solide vérité scientifique, les relations d'incertitude servent à ce titre d'*appui* à une physique qui, suite à leur avènement, a dû revoir son propre statut épistémologique.

A notre avis, il en est de même quant aux théorèmes de Gödel. Ceux-ci représentent désormais *la seule vérité inébranlable* – non-métaphysiquement inébranlable – émanant des édifices mathématiques E^{n} censés être formalisés par des $\mathbf{Sy}^{n}$ d'une puissance supérieure ou égale de l'arithmétique formelle. C'est sur *cette* vérité que les mathématiques doivent s'appuyer, quittes à revoir leur statut épistémologique dans le cadre de changements ne pouvant pas se réduire à la seule négation de ses statuts pré-gödéliens.

La conséquence immédiate de cette vérité première exprimée par les théorèmes de Gödel coïncide avec la principale conclusion de ce papier: A condition de ne pas réduire la formalisation de E par $\mathbf{Sy}$ *via* $\mathbf{\Phi}$ à une simple équivalence formelle du genre $\mathbf{\Psi}$ entre $\mathbf{Sy}$ et E identifié à $\mathbf{Sy}$-bis – c'est bien entendu un choix possible, mais pourquoi alors se tourmenter l'esprit à propos de la formalisation, du soi-disant « formalisme » et de l'ensemble des écueils post-gödéliens sévissant dans ce domaine – les théorèmes de Gödel n'admettent pas d'autre alternative que la complémentarité à exclusion réciproque rencontrée plus haut en matière de formalisation au sens semi-faible de E^{n}

par $\mathbf{Sy^n}$: Si E^n est formalisable au sens semi-faible par $\mathbf{Sy^n}$, $\exists$ E^{n+1} précédant E^n , $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et $\mathbf{Sy^n}$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. Si non-$\exists$ E^{n+1} précédant E^n , $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et $\mathbf{Sy^n}$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, alors E^n n'est pas formalisable au sens semi-faible par $\mathbf{Sy^n}$.

Nous pouvons bien entendu faire le choix de refuser *a priori* l'idée d'un E^{n+1} « non-fabriqué par l'humain» qui précéderait E^n , $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et $\mathbf{Sy^n}$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, par exemple parce cette idée nous paraît trop mystérieuse, voire mystique. Or, il s'agit là d'un choix subjectif, d'une *croyance métaphysique* au même titre que l'affirmation dogmatique de la pré-existence sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique de ce E^{n+1} par rapport à E^n, $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et $\mathbf{Sy^n}$. Si nous ne voulons ni nous laisser aller dans la subjectivité, ni retomber dans des croyances métaphysiques hélas assez souvent présentes dans la pensée de leurs pourfendeurs, nous devons admettre à titre de vérité deux *potentialités* renvoyées dos à dos, en l'occurrence l'existence et la non-existence de E^{n+1} précédant sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique E^n qu'il s'agit de formaliser au sens semi-faible par $\mathbf{Sy^n}$ dont la consistance/complétude est établie par l'intégration de $\mathbf{Sy^n}$ dans $\mathbf{Sy^{n+1}}$.

Pour aller plus loin, nous abordons dans un premier temps le point de vue déflationniste standard partant du principe que la consistance/complétude de $\mathbf{Sy^n}$ impossible à démontrer par les ressources *propres* à $\mathbf{Sy^n}$ peut être établie grâce à l'intégration de $\mathbf{Sy^n}$ dans $\mathbf{Sy^{n+1}}$ plus puissant; l'originalité de l'approche consiste en son aspect non-conservatif *assumé en tant que tel*: $\mathbf{Sy^n}$ constitue un système consistant/complet – ou système de vérités – grâce à sa consolidation par $\mathbf{Sy^{n+1}}$, $\mathbf{Sy^n} \subset \mathbf{Sy^{n+1}}$, sachant que le système élargi $\mathbf{Sy^n} \cup \mathbf{Sy^{n+1}}$ ne peut pas être à la fois consistant et complet. En nous penchant sur ce cas de figure, nous constaterons alors que le déflationnisme standard, loin de reléguer le modèle platonicien de la connaissance mathématique aux inutilités métaphysiques d'antan, souligne son indispensable rôle de dispositif de conceptualisation hors métaphysique.

Par la suite, nous nous tournerons vers l'approche particulière de Michael Detlefsen; très brièvement par ailleurs, car l'analyse plus poussée de cette approche exigerait dans notre contexte pour ainsi dire un article à part. Cette note succincte suffira toutefois pour découvrir que les conceptions *instrumentalistes* de l'auteur, aux antipodes du platonisme métaphysique, recourent elles aussi implicitement mais manifestement au modèle platonicien standard de la connaissance en tant que dispositif de conceptualisation.

Notons que Detlefsen, à notre connaissance, ne se réclame pas explicitement du déflationnisme. Nous introduisons en effet la notion de déflationnisme standard pour éviter toute confusion avec l'instrumentalisme de Detlefsen que nous comptons néanmoins parmi les approches déflationnistes (néanmoins non-standard) puisque Detlefsen exprime à son tour une conception de vérité relevant d'un choix non-conservatif.

4.21 L'approche déflationniste standard ($\mathbf{Sy^n} \subset \mathbf{Sy^{n+1}}$) face aux contraintes de la formalisation au sens semi-faible

Nous pourrions bien entendu être tenté(e)s d'envisager l'extension de $\mathbf{Sy^n}$ à $\mathbf{Sy^{n+1}}$ sans pour autant prévoir l'extension de la bijection $\mathbf{\Phi^n}$ à la bijection $\mathbf{\Phi^{n+1}}$. Autrement dit, nous contenter de la seule bijection $\mathsf{E}^n \leftarrow \mathbf{\Phi^n} \rightarrow \mathbf{Sy^n}$, i.e. assurer la consistance/complétude de $\mathbf{Sy^n}$ par l'extension de $\mathbf{Sy^n}$ à $\mathbf{Sy^{n+1}}$, $\mathbf{Sy^n} \subset \mathbf{Sy^{n+1}}$, sans pour autant nous préoccuper de la consistance/complétude de $\mathbf{Sy^n} \cup \mathbf{Sy^{n+1}}$, ni de l'extension de E^n à E^{n+1} , $\mathsf{E}^n \subset \mathsf{E}^{n+1}$ censée s'aligner par retour de bijection sur l'expression $\mathsf{E}^{n+1} \leftarrow \mathbf{\Phi^{n+1}} \rightarrow \mathbf{Sy^{n+1}}$. Ce choix – qualifié de non-conservatif » – représente apparemment un avantage de taille: L'extension de $\mathbf{Sy^n}$ à $\mathbf{Sy^{n+1}}$, d'un point de vue épistémologique, ne pose aucun problème, puisque dans les deux cas il s'agit du maniement de signes selon des règles arbitraires. D'autre part, notre choix, *dirait-on*, nous épargne les affres de l'existence de E^{n+1} précédant E^n , $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et $\mathbf{Sy^n}$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. Pourquoi alors ne pas contourner l'impasse gödélienne en consolidant E^n par une bijection $\mathsf{E}^n \leftarrow \boldsymbol{\Phi}^n \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ où $\mathbf{Sy}^{n+1}$ assure la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^n$, mais sans faire intervenir du côté E^n l'équivalent de l'extension de $\mathbf{Sy}^n$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$?

En fait, cette option « déflationniste » se heurte *dans notre contexte* à des difficultés majeures. Plus précisément, si l'option « déflationniste » représente un choix possible dans le domaine des *systèmes formels* $\mathbf{Sy}^n$ concernés par l'horizon gödélien, il en est autrement quant à la *formalisation* $\mathsf{E}^n \leftarrow \boldsymbol{\Phi}^n \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ qui nous intéresse ici *dans les limites de ses possibilités*. Le problème provient une fois de plus de la confusion potentielle entre les notions de système *formel* $\mathbf{Sy}$ et de système *formalisé* D. Cette confusion potentielle, d'autant plus menaçante qu'il est difficile d'établir intrinsèquement la différence entre l'équivalence formelle $\boldsymbol{\Psi}$ (cf. *supra*) et la formalisation *stricto sensu* $\boldsymbol{\Phi}$, devient particulièrement ravageuse lorsque nous passons d'un système *formalisé* D à un édifice mathématique E^n *à formaliser*, ce qui n'est pas la même chose.

Considérons un système *formel* $\mathbf{Sy}^n$ concerné par l'horizon gödélien, par exemple l'arithmétique formelle **AF** ou un quelconque système plus puissant. Dans le cadre d'un tel système formel $\mathbf{Sy}^n = (\mathbf{A}^n, \mathbf{Rm}^n, \mathbf{Rd}^n, \mathbf{Ax}^n)$, l'ensemble $\mathbf{Ax}^n$ des axiomes de $\mathbf{Sy}^n$ ne peut pas établir conjointement la consistance de $\mathbf{Sy}^n$ et sa complétude; autrement dit, $\mathbf{Ax}^n$ n'est pas en mesure de déterminer par ses seules ressources et pour $\forall M_j \in \mathbf{Sy}^n$ si le mot M_k est un théorème ou un non-théorèmes de $\mathbf{Sy}^n$. Remplaçons par *abus de langage* – cette option est nécessaire pour trouver un langage commun avec l'approche déflationniste – «le mot M_k est un théorème ou un non-théorèmes de $\mathbf{Sy}^n$ » par « le mot M_k est 'vrai' ou 'faux' dans $\mathbf{Sy}^n$ ». Sur ces bases, nous pouvons faire le *choix* d'affaiblir la notion de « vérité » selon l'usage abusif du concept. En langage déflationniste, nous *posons* alors que le mot M_k de $\mathbf{Sy}^n$ est « 'vrai' au sens de *D* » si M_k est démontrable *selon les modalités de démonstration D* qu'il s'agit alors de définir. Établissons la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^n$ en intégrant $\mathbf{Sy}^n$ dans $\mathbf{Sy}^{n+1} = (\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{Rm}^{n+1}, \mathbf{Rd}^{n+1}, \mathbf{Ax}^{n+1})$, $\mathbf{Sy}^n \subset \mathbf{Sy}^{n+1}$, autrement dit $(\mathbf{A}^n, \mathbf{Rm}^n, \mathbf{Rd}^n, \mathbf{Ax}^n) \subset (\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{Rm}^{n+1}, \mathbf{Rd}^{n+1}, \mathbf{Ax}^{n+1})$, tel que nous puissions déterminer pour $\forall M_j \in \mathbf{Sy}^n$, si M_k est « démontré » à partir de $(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{Rm}^{n+1}, \mathbf{Rd}^{n+1}, \mathbf{Ax}^{n+1})$. Admettons que ce soit bien le cas. Dans ces conditions, M_k n'est ni un théorème de $\mathbf{Sy}^n$, puisque $\mathbf{Sy}^n$ doit être intégré dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$ pour que sa consistance/complétude soit garanti, ni un théorème de $\mathbf{Sy}^{n+1}$ dont la consistance/complétude doit être à son tour être établie par une nouvelle extension de $\mathbf{Sy}^{n+1}$ à $\mathbf{Sy}^{n+2}$ et ainsi de suite. Pour qu'un mot M_k démontré « au sens de la modalité de démonstration *D* » soit un théorème de $\mathbf{Sy}^n$, respectivement de $\mathbf{Sy}^{n+1}$, le système formel $\mathbf{Sy}^n$, respectivement $\mathbf{Sy}^{n+1}$, les seules ressources de $\mathbf{Sy}^n$, respectivement de $\mathbf{Sy}^{n+1}$, devraient suffire pour établir quant à *l'ensemble des mots* **M** du système en question l'impossibilité 1° que deux mots M_k et $^{***}M_k$ correctement écrits et déduits des axiomes du système se contredisent directement ou au niveau de leurs conséquences et 2° qu'on tombe sur un mot $^{***}M_k$ correctement écrit et contredisant M_k directement ou au niveau de leurs conséquences, sans qu'on puisse déterminer si M_k est correctement déduit des axiomes. Rien en revanche nous empêche d'affirmer que M_k est « vrai » dans $\mathbf{Sy}^n$ « au sens de la modalité de démonstration *D* » que nous venons d'adopter. Ce *choix* ne satisfera pas tout le monde, mais c'est un choix possible. (Ajoutons encore entre parenthèses que c'est sans doute le statut de non-théorème de M_k dans les *deux* systèmes $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^{n+1}$ qui amène le déflationnisme – du moins implicitement/tacitement – à recourir à la notion de vérité en principe réservée aux *interprétations* au sens de la théorie des modèles, y compris leur cas particulier qui nous intéresse ici, en l'occurrence la *formalisation*. Intuitivement parlant, l'idée d'une « 'vérité' au sens très large » est plus maniable que celle de « théorème » non pas relativisée par rapport à un système formel $\mathbf{Sy}^n$ donné, mais écartelée entre plusieurs statuts divergents qu'ils sont censés recouvrir simultanément dans un contexte déflationniste. Mais peu importe; dans le contexte de la présente investigation, ce point n'est pas déterminant.)

Les choses changent de fond en comble, lorsque nous passons de la *fabrication* d'un système formel $\mathbf{Sy}^n$ à la formalisation (ou plutôt tentative de formalisation) d'un édifice mathématique E^n

par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ se heurtant à l'horizon gödélien. Tandis que l'extension de $\mathbf{Sy}^n$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$ assurant la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^n$ mais non pas de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ représente un choix de *fabrication* que nous libres d'effectuer selon les contraintes rencontrées, nous devons présupposer du côté de E^n l'existence de E^{n+1} nécessaire pour l'établissement de l'extension correspondant à l'élargissement de $\mathbf{Sy}^n$ par $\mathbf{Sy}^{n+1}$. Du côté de E^n, il s'agit non plus de la «*fabrication* » d'un système formel mais de la *formalisation* (ou plutôt de la tentative de formalisation d'un édifice mathématique qui *d'une façon ou d'une autre* « est déjà là ». Si – quittes à nous répéter pour la énième fois, mais ce point figure parmi les principaux enjeux du présent papier – nous ne voulons pas confondre délibérément la formalisation $\mathsf{E}^n \leftarrow \ \mathbf{\Phi}^n \ \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ et la simple équivalence formelle $\mathbf{Sy}^{n\prime} \leftarrow \ \mathbf{\Phi}^n \ \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ (cf. *supra*), nous *devons* admettre que E^n « est là » au lieu d'être « fabriqué ». D'autre part, la formalisation (ou en fait tentative de formalisation) $\mathsf{E}^n \leftarrow \ \mathbf{\Phi}^n \ \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ est censée être une bijection. Or, si $\mathsf{E}^n \leftarrow \ \mathbf{\Phi}^n \ \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ est effectivement une bijection, l'extension de $\mathbf{Sy}^n$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$ se prête juste à une relation non spécifiée R telle que $\mathsf{E}^n \leftarrow \ \mathsf{R}^{\ n} \rightarrow (\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1})$ qui n'est pas bijective pour $\mathbf{Sy}^{n+1}$. A ce niveau, on ne peut donc pas parler de *formalisation*. Tant que nous voulons rester fidèles à la conception hilbertienne de la formalisation – au lieu d'entendre par « formalisation » tout et le contraire – le « déflationnisme » ne représente pas une généralisation post-gödélienne de la formalisation au sens de Hilbert. Enfin, puisque dans le cadre de l'échafaudage $\mathbf{Sy}^n = (\mathbf{A}^n, \mathbf{Rm}^n, \mathbf{Rd}^n, \mathbf{Ax}^n)$ les axiomes réunis dans $\mathbf{Ax}^n$ ne suffisent pas pour assurer la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^n$, il en est de même quant à l'échafaudage équivalent dans E^n, consistant en des axiomes réunis dans l'ensemble $\boldsymbol{\mathsf{Ax}}^n$ et en des « conventions » répondant à $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{Rm}^n$, $\mathbf{Rd}^n$ de $\mathbf{Sy}^n$. L'extension de $\mathbf{Ax}^n$ à $\mathbf{Ax}^{n+1}$ doit donc se traduire du côté de E^n par une une extension de $\boldsymbol{\mathsf{Ax}}^n$ à $\boldsymbol{\mathsf{Ax}}^{n+1}$. Or, la possibilité d'une telle extension de $\boldsymbol{\mathsf{Ax}}^n$ à $\boldsymbol{\mathsf{Ax}}^{n+1}$ *présuppose*, comme nous l'avions vu, l'existence du moins potentielle de l'édifice E^{n+1} correspondant *via* R – devenue une relation hybride $\mathbf{\Phi}_{\mathsf{R}}{}^{n/n+1}$ (cf.3.22/expression 3-5 et déf. 3.2) – à l'extension de $\mathbf{Sy}^n$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$. Libre à nous, bien entendu, de ne pas nous préoccuper de la pré-existence ontologique, logique et épistémologique de E^{n+1} par rapport à E^n, autrement dit, de renoncer à l'extension de E^n à E^{n+1}, ce qui provoquerait néanmoins du côté de E^n et de E^{n+1} une étrange situation de *non-conservativeness* caractérisée par des propositions th_i qui, sous l'angle d'une approche non-déflationniste seraient considérées comme des théorèmes de E^n, mais qui dans le cadre d'une approche déflationniste renonçant à la pré-existence ontologique, logique et épistémologique de E^{n+1} par rapport à E^n ne seraient ni des théorèmes de E^n, ni des théorèmes de $\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}$, et ce pour ces mêmes raisons que nous avions rencontrées plus haut à propos de la « vérité » des mots M_k d'un système formel $\mathbf{Sy}^n$ établie grâce à l'extension de $\mathbf{Sy}^n$ à $\mathbf{Sy}^{n+1}$, sachant que ces M_k « vrais » en vertu d'une « modalité de démonstration déflationniste » *D* ne sont ni des théorèmes de $\mathbf{Sy}^n$, ni des théorèmes de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$.

Ainsi l'existence de E^{n+1} nécessaire quant à la transformation de la relation non-spécifique R en relation hybride $\mathbf{\Phi}_{\mathsf{R}}{}^{n/n+1}$, bijective au niveau de E^n et de $\mathbf{Sy}^n$ mais non-bijective dans l'extension ($\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}$; $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$), risque de produire un conflit entre l'approche déflationniste du concept « vérité » propre à cette approche et la notion de théorème telle qu'elle est véhiculée dans le cadre des systèmes non pas formels mais formalisés: Si du côté $\mathbf{Sy}^n$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ et $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ le fait qu'un mot M_k démontré, donc « vrai selon les modalités de démonstration *D* » ne soit ni un théorème de $\mathbf{Sy}^n$, ni un théorèmes de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$, ne pose pas de problème épistémologique, puisque nous opérons dans des systèmes formels arbitraires servant de substrat à une notion de vérité elle aussi arbitraire, les choses changent du côté E^n, E^{n+1} et $\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}$, supposant que E^{n+1} existe. Si nous voulons donner de la cohérence à une conception où une proposition th_i de E^n soit « vraie » dans E^n, sans être un théorème de E^n, ni un théorème de E^{n+1}, nous n'avons guère d'autre choix que de réduire 1° les édifices mathématiques E^n et E^{n+1} à de simples systèmes formels $\mathbf{Sy}^{n\prime}$,

respectivement $\mathbf{Sy}^{n+1\,\prime}$, et 2° la relation hybride $\Phi_R^{n/n+1}$ comportant une bijection Φ_R^{n} à une simple équivalence formelle $\Psi^{n/n+1}$ partielle; *choix* qui se situe en dehors de la formalisation au sens de Hilbert.
Tandis que dans le domaine des systèmes formels $\mathbf{Sy}^n$, la déflation permet – selon les options adoptées – de « gérer » l'horizon gödélien, cette même déflation souligne dans le domaine des tentatives de formalisation d'édifices mathématiques E^n des contraintes relevant du modèle platonicien standard de la connaissance:
Pour que la consolidation d'un édifice mathématique E^n par la relation hybride $\Phi_R^{n/n+1}$ (cf.3.22/expression 3-5 et déf. 3.2) liant E^n à un système formel $\mathbf{Sy}^n$ qui exprime des « vérités » déflationnistes démontrées selon *D* à partir de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$, soit opérante, on doit admettre qu'un édifice mathématique E^{n+1} pré-existe à E^n (ainsi qu'à $\mathbf{Sy}^n$ et $\mathbf{Sy}^{n+1}$) sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. Sans adjonction de E^{n+1} à E^n, la projection de $\mathbf{Ax}^{n+1}$ de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ vers Ax^n de E^n provoquerait dans ce dernier des problèmes soit de consistance, soit de complétude. Pour être en mesure contourner selon des modalités déflationnistes ces problèmes de consistance ou de complétude au sein de E^n, E^{n+1} doit pré-exister à E^n.
Ne pas admettre la pré-existence de E^{n+1} par rapport à E^n sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique signifie ne pas admettre la possibilité de la consolidation d'un édifice mathématique E^n par la relation hybride $\Phi_R^{n/n+1}$ liant E^n à un système formel $\mathbf{Sy}^n$ qui exprime des vérités déflationnistes à partir de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$.
Refuser le schéma « si a, alors b *ou bien* si non-b, alors non-a » impliquant le modèle platonicien standard de la connaissance reviendrait – une fois de plus – à renoncer à la distinction de *toute* formalisation *même au sens faible ou semi-faible* $\mathsf{E}^n \leftarrow \Phi_R^{n/n+1} \rightarrow (\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1})$ à l'égard de la simple équivalence formelle $\mathbf{Sy}^n \leftarrow \Psi^{n} \rightarrow \mathbf{Sy}^{n\prime}$, à la réduction de tout édifice mathématique E^n au fameux maniement de signes arbitraires selon des règles elles aussi arbitraires etc.etc., choix prêché par maintes voix mais qui 1° ne fait pas et ne peut pas faire l'unanimité et 2° rendrait en quelque sorte inutile la recherche dédiée aux fondements des mathématiques en général et à la notion de formalisation en particulier.
Reformulons les points précédents d'une manière plus compacte: Lorsque l'approche déflationniste, dans la mesure où elle vise les fondements mathématiques au lieu de rester confinée dans le domaine des systèmes formels, fait abstraction du modèle platonicien de la connaissance, elle n'est plus concernée par la formalisation remontant à Hilbert. Si l'approche déflationniste souhaite rester dans la lignée de la formalisation remontant à Hilbert, elle doit adhérer à l'encontre de ses motivations au modèle platonicien de la connaissance. Mais, dans ce cas, aurait-on encore besoin de déflation ?

4.211 L'approche déflationniste sous l'angle « entropique »

Nous essayons maintenant d'aborder le déflationnisme standard d'une manière quelque peu « allégorique ». Cette démarche a pour but de rendre plus intuitifs 1° l'«état d'esprit » du déflationnisme standard et 2° la nature des difficultés auxquelles le déflationnisme standard se heurte lorsque nous passons de la fabrication de systèmes formels $\mathbf{Sy}^n$ à la formalisation $\mathsf{E}^n \leftarrow \Phi^n \rightarrow \mathbf{Sy}^n$ même au sens affaibli.
Comme nous l'avions précisé plus haut, rien ne ne nous empêche *a priori* d'envisager l'établissement de la consistance *et* complétude d'un système formel $\mathbf{Sy}^n$ par l'intégration de ce dernier dans un système formel plus puissant $\mathbf{Sy}^{n+1}$, et ce non seulement en nous désintéressant de la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n+1}$, mais encore en admettant, voire en *postulant explicitement* que $\mathbf{Sy}^{n+1}$ *est* non-consistant *ou* non-complet, voire ni consistant, ni complet. On dirait que nous sommes prêt(e)s à « payer » la consistance *et* complétude de $\mathbf{Sy}^n$ par la non-consistance et/ou non-complétude de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$. Une telle conception exprime quelques analogies – sur le mode allégorique, ni plus ni moins – avec la théorie des systèmes physiques violant *apparemment*

l'irréversibilité. L'évolution entropique d'un système isolé $\mathbf{\Sigma}$ s'écrit, comme nous le savons toutes et tous, $\Delta S \geq 0$, où l'égalité correspond à l'entropie maximale du système. Lorsqu'on rencontre une entropie non-maximale constante ou une entropie décroissante, le système en question $\mathbf{\Sigma_1}$ est donc non pas isolé, mais intégré au sein d'un système plus large $\mathbf{\Sigma_2}$, $\mathbf{\Sigma_1} \subset \mathbf{\Sigma_2}$, tel qu'au niveau de $\mathbf{\Sigma_2}$ le bilan entropique global $\Delta S' \geq 0$ se trouve rétabli dans le sens de l'irréversibilité. Là encore, le jargon convenablement anthropomorphique dit que la diminution d'entropie (ou constance d'entropie non-maximale) localement enregistrée est « payée » par une augmentation d'entropie au niveau du système global. Nous constatons ainsi une *certaine* analogie entre le second principe élargi de la thermodynamique des systèmes non-isolés et l'idée d'une consistance/complétude de $\mathbf{Sy^n}$ « payée » par la non-consistance ou non-complétude de $\mathbf{Sy^n} \cup \mathbf{Sy^{n+1}}$. Cette analogie ne va pas trop loin: il est hors question de vouloir comparer l'état d'ordre d'un système thermodynamique mesuré par l'entropie à la consistance/complétude d'un système formel $\mathbf{Sy^n}$ ou d'un édifice E^n. En revanche, la relation – fort allégorique – « est payé(e) par » peut rendre plus intuitives les limites de l'approche déflationniste standard lorsqu'on passe des $\mathbf{Sy^n}$ aux E^n. Cette démarche facilite également l'abord du passage délicat de l'équivalence formelle entre les deux formalisations au sens faible, respectivement semi-faible à leur non-équivalence épistémologique.

Tant que nous restons dans le domaine des systèmes formels $\mathbf{Sy^n}$ par définition arbitraires, l'établissement de la la consistance/complétude de $\mathbf{Sy^n}$ éventuellement défaillante par l'intégration de $\mathbf{Sy^n}$ dans $\mathbf{Sy^{n+1}}$ « au prix » assumé de la non-consistance ou non-complétude de $\mathbf{Sy^n} \cup \mathbf{Sy^{n+1}}$ ne pose aucun problème. Il en est autrement quant aux E^n (cf. 4.21).

Lorsque nous disons « Pour tout système thermodynamique $\mathbf{\Sigma_1}$ violant l'irréversibilité, il existe certainement un système $\mathbf{\Sigma_2}$, $\mathbf{\Sigma_1} \subset \mathbf{\Sigma_2}$ tel que l'irréversibilité est rétablie au niveau de $\mathbf{\Sigma_1} \cup \mathbf{\Sigma_2}$ », c'est l'expérience qui nous autorise à nous exprimer de la sorte t*out en pouvant généraliser les indices* 1 *et* 2 *à n'importe quel* n *et* n+1. (C'est par ailleurs *exclusivement* l'expérience, mais le statut de phénomène *de facto* de l'irréversibilité appartient à un autre débat.). Or, au cas où nous dirions «*Pour n'importe quel* n, la consistance/complétude d'un édifice mathématique E^n est nécessairement 'payée ' par la non-consistance ou non-complétude de $\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}$, $\mathsf{E}^n \subset \mathsf{E}^{n+1}$ », sur *quoi* pourrions-nous nous baser? Avons-nous réellement le droit de tenir de tels propos? Tant que nous nous imposons l'interdiction de faire de la métaphysique, la réponse est non. Contrairement au second principe élargi de la thermodynamique s'appuyant sur l'expérience, son analogon métamathématique figurant ci-dessus représente une croyance métaphysique, au même titre que sa négation. Nous pouvons bien entendu faire le choix déflationniste de consolider E^n par E^{n+1} *via* l'extension $\mathbf{Sy^n} \rightarrow \mathbf{Sy^{n+1}}$ tout en nous désintéressant de l'épineuse question si $\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}$ subit nécessairement la non-consistance ou non-complétude en tant que « prix à payer » pour la la consistance-complétude de E^n, ou bien si la consistance-complétude de $\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}$ peut être à son tour assurée par une nouvelle extension $\mathbf{Sy^{n+1}} \rightarrow \mathbf{Sy^{n+2}}$. Mais nous ne sommes pas autorisé(e)s à affirmer que ce choix déflationniste est *celui qui s'impose.* Gödel s'opposerait au choix déflationniste, avançant à ce propos une croyance métaphysique sur laquelle nous reviendrons sous peu. Mais par retour des choses, le choix déflationniste, à partir du moment où il est érigé en nécessité, rejoint lui aussi les croyances métaphysiques en passant des $\mathbf{Sy^n}$ aux E^n.

Considérons maintenant la proposition *irréaliste* « Pour *tout* système thermodynamique $\mathbf{\Sigma_n}$, il existe un système $\mathbf{\Sigma_{n+1}}$, $\mathbf{\Sigma_n} \subset \mathbf{\Sigma_{n+1}}$, assurant à $\mathbf{\Sigma_n}$ une évolution entropique allant à l'encontre de l'irréversibilité.» Abstraction faite du présupposé d'une énergie de l'univers finie, l'expérience range d'emblée cette vision infinitiste des choses parmi les propositions fausses. En effet, jusqu'à nouvel ordre, l'expérience montre que toute tentative d'intégrer un $\mathbf{\Sigma_n}$ dans $\mathbf{\Sigma_{n+1}}$, ce $\mathbf{\Sigma_{n+1}}$ dans $\mathbf{\Sigma_{n+2}}$ *et ainsi de suite*, afin « repousser l'irréversibilité à l'infini » est tôt ou tard rattrapée par le second principe de la thermodynamique, généralisé ou non. Autrement dit, rien ne justifie l'idée que le passage à l'infini de l'intégration des $\mathbf{\Sigma_n}$ dans des $\mathbf{\Sigma_{n+1}}$ appropriés inverserait *in fine* la flèche thermodynamique. Comparons alors ce qui précède à cette nouvelle proposition: « Pour tout système formel $\mathbf{Sy^n}$ dont

la consistance-complétude est assurée par son intégration dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$et qui formalise sur ces bases l'édifice mathématique E^n, il existe un système formel $\mathbf{Sy}^{n+2}$ assurant la consistance-complétude de tout en permettant à ce dernier de formaliser l'édifice mathématique E^{n+1}, *et ainsi de suite*. » Cette nouvelle proposition stipule la possibilité de « repousser à l'infini » le problème de la consistance-complétude d'un édifice mathématique E^n donné. Or, contrairement à son analogon thermodynamique, notre seconde proposition est non pas « fausse » mais ni démontrable, ni réfutable. Affirmer la possibilité de « repousser à l'infini » le problème de la consistance-complétude d'un édifice mathématique E^n donné représente une croyance métaphysique, autant que la négation de cette possibilité. Comme d'habitude dans le contexte de ce papier, la seule manière de ne pas faire de la métaphysique consiste en le renvoi dos à dos des deux alternatives d'une dichotomie.
Les formalisations au sens strictement faible, respectivement au sens semi-faible fournissent alors le cadre épistémologique du choix déflationniste, respectivement du choix non-déflationniste; deux choix qui, en matière de recours à des présupposés métaphysiques, se valent.
Le point précédent nous donne par ailleurs l'occasion de revenir d'une manière plus intuitive sur la différence épistémologique des deux formalisations au sens faible et semi-faible au-delà de leur équivalence formelle.
Tant que nous restons au niveau des systèmes formels $\mathbf{Sy}^n$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+2}$ … concernés par l'horizon gödélien, l'hypothèse – aussi métaphysique que sa négation – de la possibilité de repousser à l'infini le problème de la consistance-complétude des $\mathbf{Sy}^n$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+2}$ … s'écrit *formellement parlant* comme « l'irréversibilité repoussée à l'infini » niée par l'expérience: Qu'on ait affaire à des $\mathbf{\Sigma}_n$, $\mathbf{\Sigma}_{n+1}$, $\mathbf{\Sigma}_{n+2}$ … ou à des $\mathbf{Sy}^n$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+2}$ …, dans les deux cas il s'agit d'intégrer l'entité portant l'indice n+i dans l'entité dotée de l'indice n+i+1.
En ce qui concerne la formalisation dans la mesure du possible de E^n par $\mathbf{Sy}^n$, c'est différent. Si nous optons non pas pour le choix déflationniste – formalisation de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ intégré dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$, en assumant la non-consistance ou non-complétude de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ – mais pour l'autre alternative, la *supposition* que l'opération peut être poursuivie pour les indices n, n+1, n+2 … … … , nous rencontrons un décalage au niveau de ces indices: Pour consolider E^n en le formalisant par $\mathbf{Sy}^n$, nous devons assurer la consistance-complétude de $\mathbf{Sy}^n$ en intégrant ce dernier dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$. Afin d'assurer la consistance-complétude de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ tout en continuant selon les modalités de la formalisation au sens semi-faible et non pas unilatéralement du côté des $\mathbf{Sy}^n$ $\mathbf{Sy}^{n+1}$,$\mathbf{Sy}^{n+2}$ …, nous devons cette fois-ci intégrer $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ dans $\mathbf{Sy}^{n+2}$ et admettre la pré-existence de E^{n+1} tel qu'une bijection $(\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}) \leftarrow \mathbf{\Phi}_R{}^{n+1} \rightarrow (\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1})$ puisse être établie. Ensuite il s'agit d'intégrer $(\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1} \cup \mathbf{Sy}^{n+2})$ dans $\mathbf{Sy}^{n+3}$ en admettant la pré-existence de E^{n+2} et ainsi de suite. A chaque élargissement opéré par un $\mathbf{Sy}^{n+k}$ correspond un élargissement par E^{n+k-1}.
A travers le décalage des indices n+k et n+k-1 affectés aux extensions du genre respectivement **Sy** et E, nous reconnaissons aussitôt la définition (3.2) de la formalisation au sens semi-faible. Lorsque nous faisons le *choix* d'*admettre* que pour chaque E^n formalisé « au mieux » par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ consolidé par son intégration dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$, il existe un $\mathbf{Sy}^{n+2}$ consolidant $\mathbf{Sy}^n$ – comme nous pourrions aussi faire le choix dichotomique opposé – la formalisation au sens semi-faible devient un outil indispensable en raison du décalage n / n+1 concernant les indices affectés respectivement aux E^n et aux $\mathbf{Sy}^{n+1}$.
Les propos précédents, apparemment, se prêtent à une objection. Puisque nous nous trouvons face à deux options métaphysiques qui se renvoient dos à dos et qu'il s'agit d'accepter en tant que telles, il serait éventuellement tentant de (re)formuler le choix dichotomique « Le problème de la consistance-complétude peut être 'repoussé à l'infini' » de la manière suivante, certes plus simple au niveau de l'écriture que la formalisation au sens semi-faible: « E^n n'étant pas formalisable par $\mathbf{Sy}^n$ en raison du problème de la consistance-complétude affectant $\mathbf{Sy}^n$ plus puissant que **AF**, il est en revanche possible de consolider $\mathbf{Sy}^n$ en l'intégrant dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^{n+1}$ dans $\mathbf{Sy}^{n+2}$, $\mathbf{Sy}^{n+2}$ dans $\mathbf{Sy}^{n+3}$ *et*

ainsi de suite. Du côté des E^k, on opère de façon analogue: E^n est intégré dans E^{n+1}, E^{n+1} dans E^{n+2}, E^{n+2} dans E^{n+3} *et ainsi de suite.* A chaque étape d'intégration, un $\mathbf{Sy}^{n+k}$ se trouve alors mis en correspondance avec un E^{n+k} portant le même indice. ».

Oui, certes. Mais cette manière de voir les choses n'a absolument plus rien en commun avec *ce qui reste* de la formalisation au sens de Hilbert. Au niveau de E^n et de $\mathbf{Sy}^n$, les théorèmes d'incomplétude nous empêchent d'établir une formalisation hilbertienne $\mathsf{E}^n \leftarrow \Phi_R{}^n \rightarrow \mathbf{Sy}^n$. Pour opérer une formalisation de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ au sens élargi, nous devons dans tous les cas de figure intégrer $\mathbf{Sy}^n$ dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$. Du point de vue d'une formalisation au sens élargi, la ci-dessus évoquée « mise en correspondance » entre les E^{n+k} et les $\mathbf{Sy}^{n+k}$ portant le même indice n'a donc aucun sens. Et ce qui reste de la formalisation hilbertienne doit être géré en des termes de décalage entre les indices des E^{n+k} et des $\mathbf{Sy}^{n+k+1}$.

4.22 Michael Detlefsen et l'inversion « instrumentaliste » de l'extension $\mathbf{Sy}^n \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+1}$

Detlefsen développe une approche déflationniste qu'il qualifie d'«instrumentaliste » (Detlefsen 1986, pp.1 ss.). Nous tenons à rappeler qu'à notre connaissance Detlefsen ne se réclame pas du déflationnisme; si nous rangeons sa démarche dans cette catégorie, c'est en raison de ses *choix non-conservatifs*. Afin d'éviter toute confusion, nous distinguons le « déflationnisme instrumentaliste selon Detlefsen » ou « déflationnisme non-standard » et le « déflationnisme standard» tel qu'il est présenté ci-dessus.

L'approche de Detlefsen manifeste la particularité qu'elle inverse le schéma propre à la démarche standard supposée contrer l'orage gödélien en opérant l'extension $\mathbf{Sy}^n \rightarrow \mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^n \subset \mathbf{Sy}^{n+1}$: Tandis que la démarche déflationniste standard *élargit* le système initialement considéré , Detlefsen extrait d'un système initialement considéré un système *plus restreint*. Nous verrons qu'en dépit de ce changement d'orientation, l'option de Detlefsen présuppose à son tour l'existence de E^{n+1} précédant E^n sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique.

Comme nous l'avions précisé plus haut, nous nous contentons ici d'une analyse succincte, vu qu'une étude plus approfondie du « déflationnisme non-standard » selon Detlefsen exigerait un article à part.

Detlefsen s'appuie au départ sur des considérations « instrumentalistes » ou d'« utilité instrumentaliste » dont les origines remontent à Hilbert. Ce dernier distingue la partie finitiste des mathématiques et le reste non-finitiste ayant besoin de fondements métamathématiques d'ordre finitiste (Detlefsen, 1986, pp. 1 ss; Zach, 2005, p. 18). Aux yeux de Hilbert, les propositions et démonstrations de la partie finitiste des mathématiques sont dotées d'un « contenu » (*ibid*.). Quant au reste non-finitiste, il est du point de vue finitiste « dépourvu de signification » (Detlefsen, 1986, p.4). Cette distinction prend une signification spécifique dans le cadre de la recherche dédiée aux fondements mathématiques dans la mesure où elle s'intéresse la preuve de consistance des systèmes mathématiques axiomatisés/formalisés. Certaines formules correspondent à des propositions finitistes dotées d'un contenu; Hilbert les appelle les « formules 'réelles' ». Les autres formules sont qualifiées d'«idéales» (*ibid*.). Globalement, on peut donc parler de « mathématiques réelles » et de « mathématiques idéales », à condition de ne surtout pas confondre « mathématiques réelles » et ces « mathématiques quotidiennes » du « *working mathematician* » qui serait « platonicien » dans la semaine et « formaliste » le week-end (cf. *supra*). Car c'est précisément du côté des mathématiques « quotidiennes » que Hilbert reconnaît aux « mathématiques idéales » des vertus « instrumentales »: Le recours à certains aspects des « mathématiques idéales » permet en effet d'abréger et de simplifier certaines démonstrations dont la version « réelle » serait d'une longueur difficile, voire impossible à assumer à l'humain en chair et en os (Detlefsen, 1986, p. 8 ss. pp.17 ss.; Zach, 2005, p. 19).

L'approche dont nous présentons ici un aperçu simplifié a donné lieu à quelques interprétations attribuant à Hilbert des intentions qualifiées d' « instrumentalisme ». Ces interprétations sont d'après Zach plutôt réductrice(Zach, 2005, pp. 19 ss.), mais ce point ne joue pas un rôle déterminant dans notre contexte. Ce qui précède couvre largement les les éléments pré-requis pour exposer les racines des conceptions « instrumentalistes » de Detlefsen.

Vouloir assurer par des inférences finitistes la consistance/complétude d'un édifice mathématique « réel » tout en recourant à des références mathématiques « idéales » serait de toute évidence dépourvu de sens. Or, Detlefsen remarque que seule une partie des mathématiques « idéales » est «instrumentalement utile » quant à la démonstration de la consistance des édifices « réels » (Detlefsen, 1986, pp. 86 ss.). L'auteur introduit ainsi le « résidu hilbertien », i.e. la partie « instrumentalement utile » des mathématiques « idéales » (Detlefsen, 1986, p. 89, pp.144 ss., plus spécialement p.149). Selon l'auteur, la démonstration de consistance s'impose alors uniquement pour le « résidu hilbertien », mais non pas pour les mathématiques « idéales » dans leur globalité (Zach, 2005, pp. 23 ste.).

La référence, dans le cadre de la recherche fondamentale – mathématique ou autre – à l'«utilité » en général et à l'«utilité instrumentale » en particulier fait l'enjeu d'un vieux débat qui probablement ne sera jamais clos. Notre investigation n'a pas la moindre motivation intrinsèque de prendre part à ce débat. Ce qui nous intéresse ici, ce sont les implications probablement inattendues de l'approche de Detlefsen en matière de modèle platonicien standard de la connaissance.

Afin de dégager ces implications, exprimons d'abord la distinction hilbertienne des mathématiques « réelles » et « idéales » par notre notation (E^n , $\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$). *Soulignons que la distinction hilbertienne des mathématiques « réelles » et « idéales » – peu importe alors s'il s'agit d'une reformulation dans notre notation* (E^n , $\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$) *ou non – se base sur la conviction de Hilbert d'une formalisation possible pour tout édifice mathématique* E^n *selon ledit schéma* (E^n , $\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$). *Or, c'est précisément la non-possibilité d'une telle formalisation* stricto sensu *qui est déterminante dans notre contexte. Mais, dans un premier temps, nous devons faire comme si ladite formalisation hilbertienne était possible pour tout* E^n. *Plus précisément, nous devons faire comme les mathématiques « réelles » et les mathématiques « idéales » pouvaient être séparées les unes des autres, ce qui, après le désastre gödélien* et *d'un point de vue conservatif, n'est pas le cas. Les choses peuvent changer lorsqu'on adopte le point de vue non-conservatif de Detlefsen, mais ce point du vue nous reste à élaborer. C'est à cette occasion que nous constaterons la nécessité pour l'approche de Detlefsen de recourir d'emblée à des présuppositions « platoniciennes ».*

Dans la perspective pré-gödélienne, un édifice mathématique appartient à la partie « réelle » des mathématiques si et seulement s'il existe une bijection $\Phi_R{}^n$, $\Phi_R{}^n \equiv \{\Phi_A{}^n, \Phi_M{}^n , \Phi_D{}^n ,\Phi_{Ax}{}^n\}$ reliant E^n à un $\mathbf{Sy}^n$ doté d'un ($\mathbf{A}^n$, $\mathbf{Rm}^n$, $\mathbf{Rd}^n$, $\mathbf{Ax}^n$) tel que pour chaque mot (ou « formule ») M_j de $\mathbf{Sy}^n$, une suite *finie* de déductions permet de déterminer univoquement si un M_k donné est un théorème ou un non-théorème de $\mathbf{Sy}^n$. Afin d 'éliminer un malentendu potentiel, remarquons que la partie « réelle » des mathématiques ne doit être recherchée ni du seul côté des systèmes formels $\mathbf{Sy}^n$, ni exclusivement du côté des édifices E^n. La partie « réelle » des mathématiques est composée de triplets (E^n ,$\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$). Appelons par abus de langage « mathématiques réelles » l'ensemble M_R des triplets (E^n ,$\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$) satisfaisant à la condition d'appartenance strictement finitiste à la partie « réelle » des mathématiques figurant ci-dessus. La partie « idéale » des mathématiques ou – toujours par abus de langage – les « mathématiques idéales » consistent alors l'ensemble complémentaire de M_R, noté M_∞. Les « mathématiques idéales » comprennent à leur tour des triplets (E^n ,$\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$), sachant toutefois que les $\mathbf{Sy}^n$ et $\Phi_R{}^n$ changent dans le cas de figure « idéal » de statut : En raison de l'aspect par définition infinitiste des mathématiques « idéales », nous rencontrons, en ce qui concerne le statut des $\Phi_r{}^n$, un cas de figure partiellement symétrique à celui de la formalisation au sens faible d'un édifice mathématique E^n par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ d'une puissance égale ou supérieure de l'arithmétique formelle dans un contexte gödélien. Cette formalisation au sens faible de E^n par $\mathbf{Sy}^n$ – à titre de rappel – suppose 1° que l'intégration de $\mathbf{Sy}^n$ dans $\mathbf{Sy}^{n+1}$ avec un $\mathbf{Sy}^{n+1}$ plus puissant que $\mathbf{Sy}^n$ assure la consistance-complétude de $\mathbf{Sy}^n$, sachant que cette consistance-complétude ne peut pas être établie au niveau de $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$ par les

moyens internes de $\mathbf{Sy^n} \cup \mathbf{Sy^{n+1}}$, et 2° qu'il existe une « relation hybride » $\Phi_R^{n/n+1}$ entre $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et E^{n+1} assurant l'existence d'une bijection Φ_R^n entre $\mathbf{Sy^n}$ et E^n tout en étant une relation non-bijective au niveau de $\mathbf{Sy^n} \cup \mathbf{Sy^{n+1}}$ et de $\mathsf{E}^n \cup \mathsf{E}^{n+1}$ (cf. 3.22). Au-delà de l'approche minimaliste d'une formalisation au sens faible, tout irait bien au royaume des mathématiques post-gödéliennes, si on pouvait supposer que pour *tout* $\mathbf{Sy^n}$ et E^n, l'indice n allant de 1 à ∞, il existe une « relation hybride » $\Phi_R^{n/n+1}$ entre $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et E^{n+1} , autrement dit si on pouvait poursuivre à l'infini une formalisation au sens *semi-faible* commencée par E^n et $\mathbf{Sy^n}$. Or, cette proposition ne représente que l'une des alternatives d'une dichotomie renvoyant deux options métaphysiques dos à dos. D'un point de vue finitiste, supposer la possibilité de poursuivre à l'infini une formalisation au sens semi-faible commencée par E^n et $\mathbf{Sy^n}$ ne mène strictement à rien. En revanche, les mathématiques « idéales » se caractérisent effectivement par la présupposition de l'existence de relations hybride » $\Phi_R^{n/n+1}$ entre $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et E^{n+1} où l'indice n parcourt toutes les valeurs de 1 à ∞. A l'instar des mathématiques « réelles », nous ne devons pas chercher les mathématiques « idéales » ni du seul côté des $\mathbf{Sy^n}$, ni exclusivement du côté des E^n. Comme les mathématiques « réelles », les mathématiques idéales comportent les deux composantes E^n et $\mathbf{Sy^n}$. Or, tandis que dans le triplet (E^n ,Φ_R^n, $\mathbf{Sy^n}$) propre au mathématiques « réelles », la consistance de E^n est assurée par un seul $\mathbf{Sy^n}$ *via* une bijection Φ_R^n elle aussi unique, du côté mathématique « idéales » caractérisées par le triplet (E^n, $\Phi_R^{n/n+1}$, $\mathbf{Sy^{n+1}}$) la preuve de consistance concernant exigerait une infinité de $\mathbf{Sy^{n+1}}$ et donc aussi une infinité de relations hybrides $\Phi_R^{n/n+1}$. Ce n'est que de manière idéale qu'une telle preuve de consistance de peut être envisagée.
Transcrit après-coup en l'écriture inspirée de la théorie des modèles que nous avons adoptée aux spécificités de ce papier, le *projet* de Hilbert englobant l'opposition des mathématiques réelles aux mathématiques idéales se reformule de la manière suivante: Il s'agit de re-fonder la partie « idéale » des mathématiques, autrement dit, la partie non-finitiste, par des procédés métamathématiques essentiellement fnitistes. Puisque Hilbert est convaincu de la faisabilité de son projet pour tout édifice mathématique E^n, l'aboutissement de ce projet – *s'il était possible* – se traduirait par l'établissement d'une bijection $\mathsf{M_R} \leftarrow \mathit{\Phi} \rightarrow \mathsf{M_\infty}$ reliant toute inférence des mathématiques « réelles » $\mathsf{M_R}$ à son équivalent au sein des mathématiques « idéales » $\mathsf{M_\infty}$ consolidées par des procédés métamathématiques finitistes (comp. Detlefsen, 1986, pp. 17 ste.). Précisons que la notation en italique de $\mathit{\Phi}$ a pour but d'éviter la confusion avec Φ_R^n . Il s'agit de deux espèces de bijection essentiellement différentes. La bijection Φ_r^n relie les éléments et leurs combinaisons d'un système formel $\mathbf{Sy^n}$ aux éléments et leurs combinaisons équivalents d'un édifice E^n. La bijection $\mathit{\Phi}$ en revanche relie – est *censée* relier – deux systèmes comportant des deux côtés des $\mathbf{Sy^n}$ et des E^n. Le cas de figure $\mathsf{E}^n \leftarrow \Phi_R^n \rightarrow \mathbf{Sy^n}$ existe, bien qu'il soit confiné à l'échelle modeste des systèmes d'une puissance strictement inférieure de l'arithmétique formelle. La bijection $\mathit{\Phi}$ reste un rêve de Hilbert reformulé après-coup en des termes inspirés de la théorie des modèles. Si la bijection $\mathit{\Phi}$ était *globalement* réalisable, elle jouerait en effet au sein de l'édifice mathématique *entier* un rôle « *instrumentalement utile* »: Elle attribuerait à chaque démonstration des mathématiques réelles $\mathsf{M_R}$ – on sait que leurs démonstrations sont souvent extrêmement longues, pénibles; une vie humaine parfois ne suffirait pas pour les écrire effectivement – une démonstration des mathématiques « idéales » $\mathsf{M_\infty}$ beaucoup plus courte, plus maniable, bref, représentant de nombreux avantages d'ordre cognitif, pratique ou les deux à la fois (comp. Zach, 2005 pp.23 ss.).
Maintenant, nous n'allons pas répéter que suite à l'orage gödélien, $\mathit{\Phi}$ n'est plus envisageable en les termes initiaux du projet de Hilbert. Or, c'est précisément dans le but de contourner l'écueil gödélien (comp. Zach, 2005, p. 23) que Detlefsen recourt à un « utilitarisme instrumental » qui relève certes de l'héritage hilbertien, mais qui entraîne inéluctablement des changements conceptuels par rapport à ses origines.
Detlefsen constate que seule une partie des démonstrations appartenant à $\mathsf{M_R}$ correspondent

effectivement à des démonstrations du côté des $\mathbf{M}_\infty$. Seule une partie de $\mathbf{M}_\infty$ représente donc de l'« utilité instrumentale » quant à $\mathbf{M}_\mathbf{R}$ (Zach, 2005, *ibid*.). Selon l'auteur, l'impossibilité avérée d'établir la consistance, complétude et « *conservativeness* » des $\mathbf{M}_\infty$ ne poserait pas un problème insurmontable: Uniquement la partie « instrumentalement utile » des $\mathbf{M}_\infty$ exigerait l'établissement de sa consistance, complétude et « *conservativeness* », ce qui serait réalisable.
Avant de poursuivre notre cheminement, précisons que dans le cadre du projet de Detlefsen, le concept « mathématiques réelles » change nécessairement de sens par rapport à sa signification initiale chez Hilbert. Les mathématiques « réelles » *telles que Hilbert les avait envisagées*, se rétrécissent désormais dans le cadre de la vision post-gödélienne standard – défendant le point de vue strictement conservatif – aux ($\mathbf{E}^\mathbf{n}$,$\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$, $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$) d'une puissance strictement inférieure à celle de l'arithmétique formelle **AF**. Recourir aux mathématiques « idéales » pour simplifier *ce qui reste* des mathématiques « réelles » au sens hilbertien initial – notons que la logique des propositions du premier ordre n'a guère besoin de simplification *via* idéalité infinitiste – ne mènerait pas bien loin. D'autre part, rappelons que le projet de Detlefsen cherche à contourner l'écueil gödélien. Sur ces bases, nous pouvons reformuler ce projet en les termes suivants: *Se servir de la partie instrumentalement utile des mathématiques « idéales »* $\mathbf{M}_\infty$ *pour faire regagner aux mathématiques « réelles »* $\mathbf{M}_\mathbf{R}$ *le terrain que l'orage gödélien leur avait fait perdre*.
Ceci dit, retrouvons la démarche de Detlefsen pour découvrir que le modèle platonicien standard entre certes *implicitement*, mais néanmoins de manière essentielle dans sa conceptualisation.
Detlefsen introduit la notion de « résidu hilbertien »; c'est la partie de $\mathbf{M}_\infty$ étant 1° formellement maîtrisable par réduction à des systèmes métamathématiques $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$ aux opérations finitistes et 2° « instrumentalement utile » quant à $\mathbf{M}_\mathbf{R}$. Écrivons ce résidu hilbertien $\mathbf{R}_\mathbf{H}$. La bijection caractéristique du projet hilbertien $\mathbf{M}_\mathbf{R} \leftarrow \Phi \rightarrow \mathbf{M}_\infty$ étant caduque, il s'agit donc d'établir une relation post-gödélienne $\mathbf{M}_\mathbf{R} \leftarrow \Phi \rightarrow \mathbf{R}_\mathbf{H}$ bijective seulement pour une partie $\mathbf{M}_\mathbf{R}{}^* = \mathbf{R}_\mathbf{H}$ de $\mathbf{M}_\mathbf{R}$. Maintenant, un premier constat s'impose. Puisque $\mathbf{R}_\mathbf{H} \subset \mathbf{M}_\infty$, , $\mathbf{R}_\mathbf{H} \neq \mathbf{M}_\infty$, , les $\mathbf{M}_\infty$ doivent coexister avec $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ sinon le précéder. En effet, *sur la plan purement sémantique, nous aurions du mal à cerner le résidu de quelque-chose qui soit pas « déjà là »*. Or, au-delà de cette simple coexistence de $\mathbf{M}_\infty$ et de $\mathbf{R}_\mathbf{H}$, nous retrouvons aussitôt la pré-existence de $\mathbf{M}_\infty$, par rapport à $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique.
En effet, $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ regroupe des ($\mathbf{E}^\mathbf{n}$,$\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$, $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$) où $\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$ est une bijection à part entière. Pour que cela puisse être le cas, les $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$ plus puissant que **AF** formalisant des $\mathbf{E}^\mathbf{n}$ *via* $\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$ doivent être consolidés de l'extérieur. L'appartenance de $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ à $\mathbf{M}_\infty$, , $\mathbf{R}_\mathbf{H} \neq \mathbf{M}_\infty$, , entraîne donc au niveau de $\mathbf{M}_\infty$ le prolongement des $\mathbf{E}^\mathbf{n}$ et des $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$ par des $\mathbf{E}^\mathbf{n+1}$ et des $\mathbf{Sy}^\mathbf{n+1}$, tandis que les bijections *stricto sensu* $\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$ qui, dans le cadre de $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ relient les $\mathbf{E}^\mathbf{n}$ aux $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$, deviennent au niveau de $\mathbf{M}_\infty$ des relations hybrides $\mathbf{\Phi}_r{}^{\mathrm{n/n+1}}$. Sur le plan ontologique, nous rencontrons une fois de plus l'interrogation déjà tant de fois rencontrée: Nous intéressons-nous à des formalisations authentiques $\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$ ou juste à des équivalences formelles $\mathbf{\Psi}^\mathrm{n}$? Nous avons bien entendu le droit d'opter – répétons-le à dessin – pour le second cas de figure, mais pourquoi alors nous préoccuper de fondements mathématiques cette fois-ci déflationnistes au sens large? En revanche, lorsque nous prenons la formalisation pour ce qu'elle est censée être, nous admettons du coup que ce qui est à formaliser est bien là. A partir du moment où nous admettons que le résidu hilbertien $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ est bien là tout en étant le résidu de quelque-chose, nous réalisons que les mathématiques idéales $\mathbf{M}_\infty$ transcendant $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ ne sont pas là n'importe comment. Elles sont là de la sorte que les $\mathbf{E}^\mathbf{n}$ et les $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$ de $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ deviennent effectivement les images et arguments $\mathbf{E}^\mathbf{n}$ $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$ de bijections $\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$ par rapport à ($\mathbf{R}_\mathbf{H}$, $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$) qui, dans le contexte post-gödélien ne se prête pas à cette bijectivité en comptant sur les seuls moyens propres à $\mathbf{Sy}^\mathbf{n}$, tandis que les bijections $\mathbf{\Phi}_R{}^\mathrm{n}$ de $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ se transforment en relations hybrides $\mathbf{\Phi}_r{}^{\mathrm{n/n+k}}$, $k \geq 1$, lors du

passage de R_H à M_∞ . Ce point suffit pour attribuer une dimension logique à la pré-existence de M_∞ par rapport à R_H et donc à la pré-existence des (E^{n+k} ,$\Phi_R{}^{n/n+k}$, $\mathbf{Sy}^{n+k}$) $\in$ M_∞ , k $\geq$ 1, par rapport aux (E^n ,$\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$) $\in$ R_H. Quant à la dimension épistémologique de l'affaire, elle émane directement de ce qui précède: Lorsque la raison humaine fait le *choix* de souscrire aux conceptions de Detlefsen, ce sont des (E^{n+k} ,$\Phi_R{}^{n/n+k}$, $\mathbf{Sy}^{n+k}$) $\in$ M_∞ , k $\geq$ 1, précédant de manière ontologique et logique les (E^n ,$\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$) $\in$ R_H qui déterminent – ou du moins co-déterminent – le *statut épistémologique* de ce qu'on doit entendre dans le cadre de ladite approche par une *démonstration*.
Si maintenant la cohérence du « déflationnisme » au sens de Detlefsen exige le recours à des (E^{n+k} ,$\Phi_R{}^{n/n+k}$, $\mathbf{Sy}^{n+k}$) $\in$ M_∞ précédant des (E^n ,$\Phi_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$) $\in$ R_H sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, autrement dit, si le « déflationnisme » – non-standard – au sens de Detlefsen doit – contre toute attente – faire appel au modèle platonicien standard de la connaissance, *cela ne prouve en rien l'existence d'un quelconque ciel platonicien*. Adopter – en matière de fondements des mathématiques – l'approche de Detlefsen représente un *choix* que chacun est libre de partager ou de ne pas partager.. Or, comme nous avons essayé de le montrer à travers le présent article, *tout* choix relatif aux fondements des mathématiques dans le contexte post-gödélien marqué par une irrémédiable dichotomie « si a, alors b; si non-b, alors non-a » réclame – à l'exception peut-être de la réduction des Φ_R à de simples Ψ^n – des présupposés d'ordre métaphysique. Les diverses approches déflationnistes, « standard » ou « à la Detlefsen », n'échappent pas à la règle. Nous verrons sous peu que l'approche de Detlefsen *révèle* – de manière plus percutante que l'approche déflationniste « standard » (cf. *infra*) – la nécessité de présupposés d'ordre métaphysique indispensables quant à la cohérence de l'échafaudage.
En attendant, attirons l'attention sur une symétrie remarquable entre les deux « déflationnismes » qui, en principe s'alignent sur des schémas de pensée opposés. Rappelons que l'approche déflationniste standard assure la « vérité » (ou non-« vérité ») des formules (ou « mots ») d'un système formel $\mathbf{Sy}^n$ d'une puissance égale ou supérieure à celle de l'**AF** en recourant à un système formel plus large $\mathbf{Sy}^{n+1}$, tel que $\mathbf{Sy}^n \subset \mathbf{Sy}^{n+1}$. Dans ce premier cas de figure, c'est le système *plus large* $\mathbf{Sy}^{n+1}$ qui établit la consistance/complétude de $\mathbf{Sy}^{n+1}$, sachant que la consistance/complétude du système *global* $\mathbf{Sy}^n \cup \mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^n \subset \mathbf{Sy}^{n+1}$ *non-conservatif* n'est pas garantie (comp. Detlefsen, 1986, p. 166) ni par ailleurs recherchée. Detlefsen effectue la démarche inverse: Tandis que les mathématiques idéales M_∞ dans leur *globalité* ne sont pas formellement maîtrisables, on peut, d'après Detlefsen, établir la consistance-complétude d'un édifice *partiel* de M_∞, en l'occurrence le « résidu hilbertien » R_H (cf. *supra*). Dans l'absolu, les deux « déflationnismes » standard et « à la Detlefsen » sont équivalents sous l'angle de la consistance-complétude d'un système nécessairement intégré à un système plus large dont la consistance/complétude ne peut pas être établie. C'est au niveau de leur démarche logique que les deux « déflationnismes » s'opposent: La démarche standard va d'un système donné $\mathbf{Sy}^n$ vers un système $\mathbf{Sy}^{n+1}$ plus large. La démarche de Detlefsen part d'un édifice global M_∞ pour focaliser sur un édifice partiel R_H. Or, les deux démarches, *à condition de ne pas vouloir réduire la formalisation* $\Phi_R{}^n$ *à une simple équivalence formelle* Ψ^n, aboutissent, comme nous l'avions vu, contre toute attente, à la présence d'édifices E^{n+k} , k $\geq$ 1, précédant E^n sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique. C'est à travers cette pré-existence ontologique, logique et épistémologique de E^{n+1} par rapport à E^n que les deux approches déflationniste-standard et « à la Detlefsen » développent en dépit de leurs démarches logiques opposées une symétrie remarquable.
Revenons maintenant vers ce point que nous venons d'effleurer plus haut: Non seulement tout *choix* en matière de fondements des mathématiques – y compris le « déflationnisme » – fait nécessairement appel à des *choix* d'ordre métaphysique, mais encore les choix métaphysiques qui s'imposent à l'approche de Detlefsen se révèlent de manière plus directe, plus percutante que les présupposés requis en ce sens par l'approche déflationniste standard.
L'approche déflationniste selon Detlefsen comporte une sorte de *problème* d'émergence (comp.

Detlefsen, 1986, pp. 152 ss.). Le constat qu'au sein des mathématiques idéales $\mathbf{M}_\infty$, échappant à la maîtrise formelle, on peut établir par des procédés métamathématiques finitistes la consistance et complétude du « résidu hilbertien » $\mathbf{R}_H$ est une chose. Restituer les modalités selon lesquelles $\mathbf{R}_H$ *émerge* consistant et complet de $\mathbf{M}_\infty$, de ces $\mathbf{M}_\infty$ dont on ne peut pas démontrer conjointement la consistance et la complétude en est une autre. Situer $\mathbf{R}_H$ par rapport à $\mathbf{M}_\infty$ en focalisant sur une consistance-complétude censée être vérifiée au sein de $\mathbf{R}_H$, mais qui nous échappe au niveau de $\mathbf{M}_\infty$, cela crée nécessairement un malaise épistémologique. Tout en acceptant par la force des choses l'impossibilité d'établir simultanément la consistance et complétude des mathématiques idéales $\mathbf{M}_\infty$, nous devons en même temps admettre que les mathématiques idéales $\mathbf{M}_\infty$ soient *configurées de la sorte que* $\mathbf{R}_H$ *soit consistant et complet*. La présupposition que les mathématiques idéales $\mathbf{M}_\infty$ qui par définition échappent à la maîtrise formelle soient configurées de la sorte que $\mathbf{R}_H \subset \mathbf{M}_\infty$ soit consistant et complet relève de toute évidence de la catégorie des croyances métaphysiques qui de surcroît font appel à des notions de pré-existence ontologique, logique et épistémologique. Pour assurer sa cohérence interne, la démarche déflationniste non-standard selon Detlefsen doit ainsi se rapprocher de la conception de Gödel concernant la nature ultime de l'incomplétude: Tous les édifices mathématiques $\mathbf{E}^n$, en fait « tout l'édifice $\mathbf{E}$ » serait d'après Gödel consistant et complet en sa globalité, mais les ressources limitées de la raison humaine nous condamneraient à une vision incomplète de l'édifice (Gödel, 1951/1995, p. 322 ste.; comp. p. 309 ss.). Une conception éminemment métaphysique relevant du modèle platonicien standard que nul n'est obligé(e) d'adopter, mais sans laquelle la cohérence du *choix* déflationniste selon Detlefsen ne pourrait pas être établie.

Remarquons que l'approche déflationniste *standard* rencontre exactement la même type de contrainte lorsqu'elle dépasse le seul cadre des $\mathbf{Sy}^n$ pour aborder les édifices $\mathbf{E}^n$ tout en faisant le choix de ne pas réduire les $\mathbf{\Phi}_R{}^n$ à de simples $\mathbf{\Psi}^n$. Mais dans le cadre de l'approche selon Detlefsen, la problématique en question prend manifestement une ampleur toute autre. Pour rendre ce point plus intuitif, reprenons encore une fois – sous l'angle purement *allégorique* – notre représentation « entropique » du déflationnisme standard. L'idée qu'une violation apparente de l'irréversibilité par un système $\mathbf{\Sigma}_1$ soit toujours « payée » au sein d'un système plus large $\mathbf{\Sigma}_2$, $\mathbf{\Sigma}_1 \subset \mathbf{\Sigma}_2$ nous est familière, tandis que l'émergence d'un système hautement ordonné $\mathbf{\Sigma}_1$ à partir d'un système désordonné $\mathbf{\Sigma}_2$, $\mathbf{\Sigma}_1 \subset \mathbf{\Sigma}_2$ ne correspond pas à l'expérience. Bien que cette asymétrie n'aille nullement de soi, un *postulat* du genre « L'ordre de $\mathbf{\Sigma}_1$ émerge du désordre de $\mathbf{\Sigma}_2$ » est plus coûteux en présupposés métaphysiques que le *constat* « Le gain d'ordre de $\mathbf{\Sigma}_1$ est payé par du désordre crée au sein de $\mathbf{\Sigma}_2$. » De manière analogue, des moyens techniques suffisent pour l'établissement de la consistance/complétude d'un système formel $\mathbf{Sy}^n$ grâce à son intégration dans un système plus puissant $\mathbf{Sy}^{n+1}$, $\mathbf{Sy}^n \subset \mathbf{Sy}^{n+1}$ et au « prix » de la non-consistance ou non-complétude de assumée, voire postulée, tandis que *toute* conception de l'*émergence*, à partir de $\mathbf{M}_\infty$, du résidu hilbertien $\mathbf{R}_H$ se prêtant à la formalisation en des termes de ($\mathbf{E}^n$,$\mathbf{\Phi}_R{}^n$, $\mathbf{Sy}^n$) requiert des présupposés d'ordre métaphysique.

4.3 A propos des notions de « platonisme mathématique au sens fort/au sens faible » selon Bernays

Bernays, dans sa célèbre conférence de 1934 range résolument l'approche de Hilbert dans le « *platonisme* » (Bernays, 1934, p.3)(cf. 3.121). Mais l'auteur distingue d'un côté le platonisme « *absolu* » (Bernays, 1934, p.6) ou « *extrême* » (Bernays, 1934, p.5) et d'autre part des « *assertions platoniciennes* (...) *plus faibles* » (Bernays, 1934, p.2) ou alors le « *une variété modeste du platonisme* » (Bernays, 1934, p.3) ou enfin le « *platonisme restreint* » (Bernays, 1934, p.6). Afin de simplifier le discours, reformulons cette distinction de des termes de « platonisme au sens fort » et de « platonisme au sens faible ». Le « platonisme au sens fort », d'après Bernays, consiste en un « *réalisme conceptuel* » (Bernays, 1934, p.3). Le « platonisme au sens faible » se limite à une « *projection idéalisée d'un domaine de pensée* » (Bernays, 1934, p.6). D'autre part, Bernays estime que le platonisme, ou plutôt les « *théories platoniquement inspirées* » fournissent des « modèles *d'imagination abstraite* » (Bernays, 1934, p.3; c'est nous qui soulignons.). Puisque Bernays ne retient que le « platonisme au sens faible » (cf. *infra*), nous *pourrions* (mais attention au conditionnel) reconnaître dans ces « *théories platoniquement inspirées qui fournissent des modèles d'imagination abstraite* » le « modèle platonicien standard de la connaissance » tel que nous l'avons véhiculé à titre de *dispositif de conceptualisation*. En fait, c'est moins simple: Nous pouvons toujours évoquer des « projections idéalisées », oui, mais des projections idéalisées *de quoi* ? La question paraît d'un abord de relativement aisé, tant que nous restons dans le domaine de l'ontologique. Afin de nous expliquer, retrouvons l'état d'esprit de la géométrie élémentaire évoqué au début de notre fastidieux parcours: Lorsque nous traçons une « droite » sur le papier, cette figure n'est que la représentation grossière et imparfaite de *la* droite sans guillemets. Rien alors ne nous empêche de considérer *la* droite, un être immatériel infiniment long dans les deux sens, infiniment fin, infiniment lisse, comme l'*idéalisation* rationnelle de la figure nécessairement finie et rugueuse, tout en manquant de finesse. Oui, certes, mais les propriétés de la figure, les théorèmes dont ladite figure représente – ou co-représente – le support s'inscrivent dans ladite idéalisation et *s'expriment indépendamment du degré d'approximation* caractérisant – en fait, par rapport à quoi exactement ? – nos tracés effectifs des figures en question. Bien entendu, le point précédent ne prouve absolument rien, ni le contraire. A ce titre, le dossier est l'objet de controverses qui probablement ne trouveront jamais de fin. Le fond du problème est aisé à saisir: Le modèle platonicien standard de la connaissance décliné sous forme de « platonisme mathématique » ne se réduit pas à l'ontologie; il est déployé sur les trois dimensions ontologique, logique et épistémologique. Afin de ne pas alourdir le texte (pour de plus amples informations, cf. Dumoncel, sans date, pp.3 ss.) effleurons juste le côté l'aspect épistémologique de la question: Une épistémologie se voulant positive – non pas positiviste mais positive – ne peut que prendre acte de la présence objective des ci-dessus mentionnées controverses, sachant que toute prise de positions dans ce domaine relève aussitôt de la croyance métaphysique. Cette situation s'accommode bien de la superposition de dichotomies fragilisant les fondements des mathématiques avant comme après Gödel.

Ceci dit, (re-)tournons-nous surtout vers la dimension logique du modèle platonicien . Un système formel $\mathbf{Sy}^n$ *censé* formaliser un édifice mathématique E^n – insistons sur ce « *censé* formaliser »; la conférence de Bernays s'inscrit pour l'essentiel encore dans le contexte pré-gödélien, bien que l'auteur mentionne vers la fin de son texte « 'le' théorème » de Gödel (en fait le deuxième) (Bernays, 1934, p.21) (cf. *infra*) – possède par définition sa propre structure logique. L'établissement d'une bijection $\Phi_R{}^n$ entre $\mathbf{Sy}^n$ et E^n présuppose que l'édifice E^n soit lui aussi muni d'une structure logique qui se prête à l'opération. Si nous voulons rester fidèles à l'idée de projection idéalisée, allons-nous maintenant postuler que la logique de $\mathbf{Sy}^n$ idéalise la logique de E^n ? Bien qu'il semble permis d'avancer des réserves quant à la conception de logiques plus idéalisées que d'autres, admettons cette option. Mais, dans ce cas, pouvons-nous encore établir une bijection $\Phi_R{}^n$ entre deux systèmes $\mathbf{Sy}^n$ et E^n comportant l'un un logique « idéalisée » et l'autre une logique « grossière »?

L'orage gödélien semble offrir (si on veut) une solution à ce propos: L'impossibilité effective d'établir une bijection $\Phi_R{}^n$ entre E^n et $\mathbf{Sy}^n$, cette impossibilité ne traduit-elle pas justement la non-superposition entre deux systèmes logiques, l'un parfait, l'autre imparfait?

Vue de près, cette solution s'avère insatisfaisante. C'est le système formel $\mathbf{Sy}^n$ d'une puissance supérieure ou égale à celle de l'arithmétique formelle **AF** qui se prête soit à la démonstration de sa consistance au détriment de la complétude, ou bien à la démonstration de sa complétude au détriment de la consistance, mais non pas à la démonstration simultané de sa consistance et de sa complétude requise pour que le système « tienne ». *C'est au niveau de* $\mathbf{Sy}^n$ *que réside l'écueil entravant l'établissement d'une bijection* $\Phi_R{}^n$ *entre* E^n *et* $\mathbf{Sy}^n$. C'est au sein de $\mathbf{Sy}^n$ que nous risquons de démontrer simultanément un théorème th_n correspondant à une proposition th_n censée

être vraie dans E^n, et le contre-théorème ***th_n = non- th_n. Bref, le problème provient non pas de ce que Bernays considère comme une « projection idéalisée », mais du système formel **Sy**^{n} élaboré afin de maîtriser ladite projection.
Rappelons maintenant que la conférence de 1934 se réfère pour l'essentiel au contexte pré-gödélien, bien que Bernays mentionne « 'le' théorème » de Gödel à la fin du texte (cf. *supra*). En effet, à ce stade de son parcours, Bernays ne semble *pas encore* mesurer toute l'ampleur du désastre. Ainsi il refuse le platonisme « au sens fort » en se référent non pas aux théorèmes de Gödel, mais au paradoxe de Russel qui, de notre point de vue contemporain, surgit du côté non pas des **Sy**^{n} mais bel et bien des E^n, pulvérisant de la sorte la prétendue harmonie du ciel platonicien (Bernays, 1934, p.6). Gödel, dont les deux théorèmes s'avèrent autrement plus foudroyants et qui, *dans la perspective de Bernays*, fourniraient un argument « anti-platonicien » bien plus portant que le paradoxe de Russel, Gödel donc adopte une position diamétralement opposée à celle de Bernays: Puisque l'orage gödélien est ancré du côté des **Sy**^{n} de fabrication humaine, il n'affecte pas du tout les édifices mathématiques E^n en tant que tels. Ceux-ci, d'après Gödel, existeraient platoniquement en soi; les théorèmes d'incomplétude ne prouveraient rien d'autre que la vision du ciel platonicien élaborée par les ressources limitées de la raison humaine est nécessairement incomplète. (Gödel, *ibid.*)
Comment trancher entre ces deux positions s'opposant en exclusivité réciproque? Si on se refuse de « faire de la métaphysique », on ne peut pas trancher. Pourtant, *à sa manière* et dans le contexte actuel des choses, le modèle platonicien standard de la connaissance conçu à titre de dispositif de conceptualisation dédié aux fondements des mathématiques répond à sa vocation non pas sous forme d'un « platonisme au sens faible », mais en sa version « forte ». En d'autres termes, le modèle platonicien standard de la connaissance décliné à titre de dispositif de conceptualisation délivre bel et bien une vérité donnée d'avance. Or, cette vérité donnée d'avance – plus haut nous avions évoqué une lointaine ressemblance entre la structure de ce type de vérité et le principe d'incertitude de Heisenberg (cf. *supra*) – représente une vérité au second degré: Elle se décline selon le schéma « si a, alors b; si non-b, alors non-a » à exclusion réciproque tant de fois rencontré dans ce papier; schéma qui s'exprime en dernier lieu de la manière suivante: 1° La distinction – *via* la non-réduction de $\mathbf{\Phi}_R{}^n$ à $\mathbf{\Psi}^n$ – des systèmes formels **Sy**^{n} et des systèmes formalisés/à formaliser E^n présuppose des choix métaphysiques, sachant que l'hypothèse de l'existence objective d'un « ciel platonicien » d'ordre mathématique est ni plus, ni moins métaphysique que l'hypothèse de l'inexistence d'un tel « ciel platonicien ». 2° Le refus de tout choix métaphysique entraîne l'impossibilité d'une distinction des systèmes formels **Sy**^{n} et des systèmes formalisés/à formaliser E^n .

4.4 Le modèle platonicien standard de la connaissance comme choix économique

A partir du moment où nous admettons que la *possibilité potentielle* d'une formalisation *stricto sensu* (avérée pour des édifices E formalisables par des systèmes formels **Sy** moins puissants que l'arithmétique formelle) ou d'une formalisation au sens semi-faible d'un édifice E^n par un système formel **Sy**^{n} (c'est le cas des édifices E^n susceptibles d'être formalisés par un système formel **Sy**^{n} d'une puissance supérieure ou égale à celle de l'arithmétique formelle) *présuppose* la pré-existence d'un autre édifice E^{n+1} sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, le modèle platonicien standard représente la *solution la plus économique* en tant que dispositif de conceptualisation de cette pré-existence certes problématique en soi.
En effet, d'autres approches de ladite pré-existence ontologique, logique et épistémologique ont été avancées; approches à leur tour ancrées dans l'histoire de la philosophie générale. Mais ces approches exigent l'adoption d'un plus grand nombre de présupposés que l'adoption du modèle platonicien standard de la connaissance, du moins tant que ce dernier fait exclusivement fonction de dispositif de conceptualisation n'ayant en aucune façon la vocation de prendre position quant à la

dichotomie qu'il conceptualise.
Pour y voir plus clair, revenons brièvement sur Gödel et sa vision *personnelle* de l'incomplétude dérivant de ses deux théorèmes. Bien qu'évoquer le « platonisme » de Gödel relève désormais d'une routine pas forcément productive (Hintikka, 2005, p.535), nous sommes obligé(e)s de nous y attarder, puisque les choses sont – comme d'habitude – moins simples qu'il ne le semble. La célèbre citation gödélienne « *La position platoniste est la seule qui soit tenable. Par là, j'entends la position selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non sensible qui existe indépendamment aussi bien des actes que des dispositions de l'esprit humain et qui est seulement perçue, et probablement perçue* de façon très incomplète*, par l'esprit humain*. » (Gödel 1951/1995, pp. 322 ste.; c'est nous qui soulignons) est, abstraction faite des « clichés » qu'elle a pu générer, fort significative quant à notre contexte spécifique. Face à *l'hypothèse de travail* (cf. *supra*) « l'édifice mathématique tient globalement », Gödel exprime la *conviction* qu'au-delà des formalisations au sens semi-faible d'un nombre toujours fini que nous sommes en mesure d'effectuer, une infinité de formalisations au sens semi-faible est déjà déployée. L'incomplétude selon Gödel traduit donc le fait qu'il nous est impossible d'effectuer une infinité de formalisations au sens semi-faible.
Contrairement au modèle platonicien standard de la connaissance faisant fonction de dispositif de conceptualisation, la *conviction platonicienne* de Gödel fait appel à des spéculations philosophiques. Or, ce choix risque toujours de se heurter aux insuffisances de tel ou tel système. Il n'est donc pas étonnant que la pensée de Gödel oscille entre Platon et Leibniz, ses « préférés » (Solomon, sans date, pp. 4ss., 9ss. et *passim*; Burgess, 2010, pp. 3 ss., 17 ss. et *passim*.) avec des incursions (très réservées) dans la *Critique de la raison pure* de Kant. Leibniz, en première approximation, conçoit une « harmonie pré-établie, mise en place par Dieu ». Notre connaissance limitée de cette harmonie pré-établie nous donnerait l'impression d'une existence incohérente. En soi, ce schéma de raisonnement peut convenir à l'instigateur de l'incomplétude. Or, l'intervention divine dans le système représente une hypothèse franchement coûteuse en investissements d'ordre métaphysique, et ce d'autant plus que suite à la *Critique de la raison pure*, les ressources de la raison humaine sont estimées globalement insuffisantes pour prouver l'existence ou l'inexistence de Dieu. Tout en s'occupant ultérieurement à la « preuve ontologique », Gödel ne semble pas s'opposer aux critiques que Kant adresse à Leibniz. En ce qui concerne la *Critique de la raison pure*, Gödel s'y intéresse dans la mesure où cette approche définit elle aussi une pré-existence immatérielle censée gouverner l'existence, y compris ses aspects matériels. Toujours en première approximation, le monde que nous apercevons est, d'après Kant, non pas le monde en soi mais le monde tel qu'il est re-configuré par les facultés des la raison. Comme d'autre part, les mathématique sont elles aussi une émanation de la raison, il ne serait pas étonnant que les lois de la physique, quoiqu'issues de l'expérience, prennent une forme mathématique. Tout en souscrivant à la thèse kantienne d'un monde phénoménal aperçu non identique au monde en soi, et plus spécialement d'un temps appartenant aux facultés de la raison humaine, donc inexistant en soi (Gödel, 1946/1995, pp. 247 ss. ; Burgess, 2010, p.6) Gödel estime – à l'instar d'une majorité de savants du 20ième siècle – que la *Critique de la raison pure* est prise au dépourvu par les grandes révolutions scientifiques se produisant à partir de la deuxième moitié du 19ième siècle: l'avènement d'abord des géométries non-euclidiennes, et par la suite des théories de la relativité et de la mécanique quantique. Tout cela entrerait nécessairement en collision avec un monde phénoménal configuré *a priori* en des termes de physique newtonienne postulant sur fond de causalité et de géométrie euclidienne un espace et un temps absolus. Pourtant, le dossier est en principe arrangeable en élargissant – schématiquement parlant – le système kantien en les termes suivants: 1° le monde connaissable est non pas le monde en soi mais un monde re-configuré par les facultés de la raisons données *a priori*. 2° Pour acquérir ds connaissances du monde phénoménal configuré par ses facultés *a priori*, la raison peut et doit procéder par *approximations successives*. 3° En aucun moment, la raison peut être certaine d'avoir atteint le stade ultime d'une connaissance donnée.
Cette forme de néo-kantisme partiellement hégélianisé *aurait* éventuellement pu trouver grâce aux yeux de l'instigateur de l'incomplétude. Mais, quoi qu'il en soit, le kantisme en ses deux formes originelle et aménagée en fonction des grandes révolutions scientifiques du 20ème siècle requiert

également de nombreux présupposés d'ordre notamment cognitif; présupposés en dernier lieu non-vérifiables (ou non-réfutables, si on préfère, en sacrifiant au poppérisme), puisqu'en dépit de la progression des sciences cognitives nous ne pouvons pas sortir de nous-mêmes afin de constater la congruence ou non-congruence du monde des noumènes et du monde des phénomènes.
Même exprimé à titre de conviction métaphysique – ce qui qui n'entre pas dans nos intentions – le modèle platonicien standard s'avère plus simple et plus économique que les approches « concurrentes » dues à Leibniz et Kant. A plus forte raison, le modèle platonicien standard conçu avec le statut de dispositif de conceptualisation peut se passer des présupposés métaphysiques de l'approche de Leibniz ou – si on veut – cognitifs du système kantien.
En effet, à partir du moment où nous aboutissons à une opposition des complémentaires réciproquement exclusifs, autrement dit à une dichotomie du genre « *si* un édifice mathématique E^n peut être formalisé au sens semi-faible par un système formel $\mathbf{Sy}^n$, alors il existe un édifice E^{n+1}, $\mathsf{E}^n \neq \mathsf{E}^{n+1} \wedge \mathsf{E}^n \subset \mathsf{E}^{n+1}$, qui précède E^n et $\mathbf{Sy}^n$ sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique; *si* aucun édifice E^{n+1}, $\mathsf{E}^n \neq \mathsf{E}^{n+1} \wedge \mathsf{E}^n \subset \mathsf{E}^{n+1}$ ne précède l'édifice E^n sur les trois plans ontologique, logique et épistémologique, alors E^n ne peut pas être formalisé au sens semi-faible par un système formel $\mathbf{Sy}^n$ », à partir du moment donc où nous aboutissons à *cette* conclusion *sans prendre position puisque cela n'est pas possible*, la question d'éventuelles convictions *essentiellement métaphysiques* penchant plutôt vers Platon, Leibniz ou Kant ne se pose plus. Sous cet angle, le modèle platonicien standard de la connaissance représente l'option la plus économique en présupposés.

Références

- AVODAY, S. and and CARUS, A.W. *Gödel versus Carnap; on Syntax and Tolerance*, http://www.hss.cmu.edu/philosophy/techreports/106_Awodey.pdf

- BENACERRAF, Paul, *Mathematical Truth*, The Journal of Philosophy, Vol. 70, No. 19, Seventieth Annual Meeting of the American Philosophical Association Eastern Division. (Nov. 8, 1973) http://thatmarcusfamily.org/philosophy/Course_Websites/Readings/Benacerraf%20-%20Mathematical%20Truth.pdf

- BERNAYS, Paul, *Platonism in mathematics*, 1935, http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/platonism.pdf

- BEZIAU, Jean-Yves, *What is « formal logic »?* (2008) http://www.jyb-logic.org/jyb-form-final-sp.pdf

- BONIFACE, Jacqueline, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*, Vrin, Paris, 2004

- BOUVERESSE, Jacques, *Sur le sens du mot « platonisme » dans l'expression « platonisme mathématique*, Société romande de philosophie/Athéna, Genève, 1998, http://athena.unige.ch/athena/bouveresse/bouveresse_platonisme_mathematique.html

- BRUCE, Lars-Eric, *Gödel's first theorel of incompleteness and the limits of formal systems*, 2011, http://folk.uio.no/larsereb/informatikk/inf5800/godel_incompleteness.pdf

- BURGESS, John P. *Intuitions of three Kinds in Gödel's View on the Continuum*, www.princeton.edu/~jburgess/Goedel.doc

- CLERO, Jean-Pierre, *La Raison de la fiction*, Armand Colin, Paris, 2004

- CORRY, Leo, *On the origins of Hilbert's sixth problem: physics and the empiricist approach to axiomatization*, European Mathematical Society, Proceedings of the International Congress
- of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006. http://www.icm2006.org/proceedings/Vol_III/contents/ICM_Vol_3_82.pdf

- DAVIES, E. Brian, *Platonisme in Science and Mathematics*, DMV Gauss Lectures, 2010 ,http://www.mth.kcl.ac.uk/staff/eb_davies/GaussJenaSlides2.pdf

- DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben, *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin, Boston and New York, 1981

- DETLEFSEN, Michael, *Hilbert's Programm, An Essay on Mathematical Instrumentalism*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986

- DUBINSKY, Ed, *Meaning and Formalism in Mathematics*, 2000, http://www.math.kent.edu/~edd/UmeaII.pdf

- DUMONCEL, Jean-Claude, *Quatre degrés d'engagement dans le platonisme mathématique*, (sans date) http://www.academia.edu/1142503/
- Quatre_degres_dengagement_dans_le_platonisme_mathematique

- DUTILH NOVAES, Catarina, *The Different Way in in which Logic is (said to be) Formal*, History and Philosophy of Logic, http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/01445340.2011.555505

- EWALD, William (éd.), *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1996

- FANO, Vincenzo et GRAZIANI, Pierluigi, *On the necessary philosophical premises of the Gödelian arguments*, 2011, http://philsciarchive.pitt.edu/8844/1/GODEL_FANO_GRAZIANI_Lungo_Ultima_versione.pdf

- GÖDEL, Kurt, *What is Cantor's continuum problem ?* (Version 1964) in Kurt Gödel *Collected Works*, Vol. II: (FEFERMAN, Solomon, et al. (eds.)) Oxford University Press, New York, 1990

- GÖDEL, Kurt, *Some observations about the relationship between theory of relatvity and Kantian philosophy*, 1946, in Kurt Gödel, *Collected Works*, t. III (FEFERMAN, Solomon, et al. (eds.)) Oxford University Press, New York, 1995

- GÖDEL, Kurt, *Some basic theorems on the foundations*, 1951, in Kurt Gödel, *Collected Works*, t. III (FEFERMAN, Solomon, et al. (eds.)) Oxford University Press, New York, 1995

- HARTHONG, Jean, *L'Idéalisme platonicien et la science*, in PANZA, Marco et Salanskis, Jean-Michel (sous la dir. de), *L'Objectivité mathématique, platonismes et structures formelles,* Masson, Paris, 1995

- HEINZMANN, Gerhard, *Paul Bernays et la rénovation des fondements Philosophiques des* mathématiques, 2006, http://poincare.univnancy2.fr/digitalAssets/153511_bernays_renovation_fondements.pdf

- HILBERT, David, *Mathematical Problems,*1900, in EWALD, William (éd.), *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1996

- HILBERT, David, *Grundlagen der Geometrie* (1902) in HALLET, Michael, MAJER, Ulrich, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*, Springer, Berlin, 2004

- HILBERT, David, *Axiomatic Thougt*, 1918, in EWALD, William (éd.), *From Kant to Hilbert, A Source*

Book in the Foundations of Mathematics, Clarendon Press, Oxford, 1996

- HILBERT, David, *The New Grounding of Mathematics*, 1922, in William (éd.), *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1996

- HILBERT, David, *The Foundations of Mathematics* (1927) http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm

- HLBERT, David, BERNAYS, Paul, *Foundations of Mathematics Vol. 1* (Grundlagen der Mathematik, Vol.1 (1934); translation by Ian Mueller (2003)) http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/bernays12-1_2003-06-25.pdf

- HINTIKKA, Jaakko, *What Platonism? Reflections on the Thought of Kurt Godel*, Revue internationale de philosophie 2005/4 (n° 234)http://www.cairn.info/revue-internationale-de-philosophie-2005-4-page-535.htm

- LENHARD, Johannes, *Axiomatics Without Foundations. On the Model-theoretical Viewpoint In Modern Axiomatics*, Philosophia Scientiæ 9-2 (2005), www.philosophiascientiae.revues.org/pdf/526

- LINNEBO, Oystein, *Epistemological Challenges to Mathematical Platonism*, Philosophical Studies 129, 2006, https://57854434-a-62cb3a1a-s-sites.googlegroups.com/site/easwaran/readings/Linnebo2006.pdf

- MAZUR, Barry, *Mathematical Platonism and its Opposites*, 2008, http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/plato4.pdf

- MLIKA, Hamdi, *Quine et l'antiplatonisme*, L'Harmattan, Paris, 2007

- MUGUR-SCHÄCHTER, Miora, *Sur le Tissage des connaissances*, Hermes, Paris, 2006

- MUGUR-SCHÄCHTER, Miora, *L'Infra-mécanique quantique*, Dianoïa, Chennevières-sur Marne, 2009

- PANZA, Marco et Salanskis, Jean-Michel (sous la dir. de), *L'Objectivité mathématique, platonismes et structures formelles,* Masson, Paris, 1995

- PUTNAM, Hilary, *Mathematics without Foundations*, The Journal of Philosophy, Volume LXIV, n°1, january 19, 1967, http://thatmarcusfamily.org/philosophy/Course_Websites/Math_S08/Readings/Putnam_MWF.pdf

- RUELLE, David, *Mathematical Platonism Reconsidered*, 1999, http://www.ihes.fr/~ruelle/PUBLICATIONS/127plato.pdf

- SAFFREY, Henri-Dominique, *Αγεωμέτρητος μηδείς είσίτω. Une inscription légendaire* , Revue des Etudes grecques, Année 1968, Volume 81, numéro 81-384-385 http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/reg_0035-2039_1968_num_81_384_1013

- SALANSKIS, Jean-Michel, *Platonisme et philosophie des mathématiques*, in PANZA, Marco et Salanskis, Jean-Michel (sous la dir. de), *L'Objectivité mathématique, platonismes et structures formelles,* Masson, Paris, 1995

- SCHRÖDER, Ernst, *Algebra der Logik*, Teubner, Leibzig, 1890, http://ia600201.us.archive.org/0/items/voalgebraderlogi01schrrich/voalgebraderlogi01schrrich.pdf

- SIMONS, Peter, *Formalism*, 2012, http://www.tara.tcd.ie/bitstream/2262/61824/1/Formalism.pdf

- SNAPPER, Ernst, *The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism*, Mathematics Magazine vol. 52, n° 4, 1979, http://www2.gsu.edu/~matgtc/three%20crises%20in%20mathematics.pdf

- SOLOMON, Martin K, *On Kurt Gödel's Philosophy of Mathematics*, 2004, www.cse.fau.edu/~marty/**godel**.doc

- SRINIVASAN, Radhakrishnan, *Platonism in Classical Logic versus Formalism in the Proposed non-Aristotelian Finitary Logic*, 2003 *http://philsci-archive.pitt.edu/1166/1/nafl2.pdf*

- STOLTZNER, Michael, *How Metaphysical is Deepening the Foundation? Hahn and Frank on Hilbert's Axiomatic Method?* 2013, http://philsci-archive.pitt.edu/cgi/search/simple?q=Stolzner+How+Metaphysical+is+“Deepening+the+Foundations”%3

- VIDAL-ROSSET, Joseph, *Does Gödel's Incompleteness Theorem Prove that Truth Transcends Proof?* 2005, http://jvrosset.free.fr/Goedel-Proof-Truth.pdf

- VOSKOLOUGO, Michael Gr. *Formalism and Intuition in Mathematics. The Role of the Problem*, Quaderni di Ricerca in Didattica, n° 17, 2007, http://math.unipa.it/~grim/quad17_Voskolougu_07.pdf

- ZACH, Richard, *Hilbert's Programm, Then and Now*,2005 http://philsci-archive.pitt.edu/2547/1/hptn.pdf